

**Άσκηση 1:** Να λυθεί και να διερευνηθεί για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων  $a, b \in \mathbb{R}$  το σύστημα:

$$ax + y + z = 4$$

$$x + by + z = 3$$

$$x + 2by + z = 4$$

**Λύση**

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - a\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 0 & -b & 0 & -1 \\ 0 & 1-2ab & 1-a & 4-4a \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\Sigma 1 \\ b \neq 0 \\ \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 / (-b)}} \begin{bmatrix} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/b \\ 0 & 1-2ab & 1-a & 4-4a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/b \\ 0 & 1-2ab & 1-a & 4-4a \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (1-2ab)\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/b \\ 0 & 0 & 1-a & 4-4a - \frac{(1-2ab)}{b} \end{bmatrix}$$

Για  $b \neq 0$ ,

- αν  $a=1$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/b \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2b-1}{b} \end{bmatrix}$$

i) Αν  $b \neq 1/2$  το σύστημα είναι αδύνατο.

ii) Αν  $b = 1/2$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  το σύστημα έχει άπειρες λύσεις:

$$y = 2$$

$$x + y + z = 4 \Rightarrow x = 2 - z$$

$$(x, y, z) = (2 - z, 2, z) = (2, 2, 0) + z(-1, 0, 1)$$

- αν  $a \neq 1$ , μοναδική λύση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2b & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/b \\ 0 & 0 & 1-a & 4-4a - \frac{(1-2ab)}{b} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{άρα } (1-a)z = 4-4a - \frac{(1-2ab)}{b} \Rightarrow z = 4 - \frac{(1-2ab)}{b(1-a)} \\ y = 1/b \\ x + 2by + z = 4 \Rightarrow x + 2b \frac{1}{b} + 4 - \frac{(1-2ab)}{b(1-a)} = 4 \Rightarrow x = \frac{(1-2ab)}{b(1-a)} - 2 \end{array}$$

Αν  $b=0$  από το  $\Sigma 1$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-4a \end{bmatrix} \text{ το σύστημα είναι αδύνατο}$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

**Άσκηση 2 :** Να δείξετε ότι το παρακάτω σύστημα δεν έχει λύση:  $2x_1 - 3x_2 = 5$

$$4x_1 + x_2 = 7$$

**Λύση:** Ανάγουμε τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & & & \\ 2 & -3 & 5 & & & \\ 4 & 1 & 7 & & & \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_3 = \Gamma_3 - 4\Gamma_1]{\Gamma_2 = \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & & & \\ 0 & -5 & 1 & & & \\ 0 & -3 & -1 & & & \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 = \Gamma_2 / (-5)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & & & \\ 0 & 1 & -1/5 & & & \\ 0 & -3 & -1 & & & \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 = \Gamma_3 + 3\Gamma_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & & & \\ 0 & 1 & -1/5 & & & \\ 0 & 0 & -8/5 & & & \end{array} \right]$$

Άρα  $\text{rank}(A)=2 \neq \text{rank}(A/b)=3$  συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο.

**Άσκηση 3 :** Δίνονται οι πίνακες  $A = \begin{bmatrix} \alpha+4 & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & \alpha+1 \\ 4 & 1 & -2\alpha \end{bmatrix}$  και  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του  $a \in \mathbb{Z}$  έτσι ώστε η εξίσωση  $AX=0$ , να έχει μη μηδενικές λύσεις

β) Να υπολογιστούν οι λύσεις του συστήματος  $AX=0$  για τις τιμές  $a$  που βρήκατε.

**Λύση:** α) Ένα ομογενές σύστημα έχει μη μηδενικές λύσεις (δηλαδή άπειρες λύσεις) όταν η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος είναι μηδενική.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha+4 & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & \alpha+1 \\ 4 & 1 & -2\alpha \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 = \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 = \Gamma_2 + \Gamma_1} \begin{vmatrix} \alpha+4 & 1 & 1 \\ 2\alpha+4 & 0 & \alpha+2 \\ -\alpha & 0 & -2\alpha-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{ανάπτυγμα 2η στήλη}} \\ = -1 \begin{vmatrix} 2\alpha+4 & \alpha+2 \\ -\alpha & -2\alpha-1 \end{vmatrix} = \dots = 3\alpha^2 + 8\alpha + 4 \\ \det(A) \neq 0 \rightarrow \begin{cases} a = -4/6 \\ a = -2 \end{cases}$$

Άρα μοναδική αποδεκτή (ακέραια) τιμή  $a = -2$

β) Για  $a = -2$  ο πίνακας του συστήματος γίνεται  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Τον μετασχηματίζουμε σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & & & \\ -2 & -1 & -1 & & & \\ 4 & 1 & 4 & & & \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 = \Gamma_1 / 2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & & & \\ -2 & -1 & -1 & & & \\ 4 & 1 & 4 & & & \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_3 = \Gamma_3 - 4\Gamma_1]{\Gamma_2 = \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 2 & & & \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & & & \\ 0 & -1 & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right]$$

Άρα  $\text{rank}(A)=2 < 3=n$  (πλήθος αγνώστων) άρα άπειρες λύσεις τις οποίες βρίσκουμε με πίσω αντικατάσταση

$$\begin{cases} -y + 2z = 0 \\ x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x + \frac{1}{2}(2z) + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = -\frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$\text{Άρα } (x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}z & 2z & z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Γεωμετρική ερμηνεία χώρου λύσεων: Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, παράλληλη στο διάνυσμα  $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**Άσκηση 4:** Ναδειχθεί ότι για τον  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  ισχύει  $A^{2n} = I$

**Λύση:** Ο πίνακας είναι τριγωνικός άρα έχει για ιδιοτιμές τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου, ήτοι  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ .

Οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους άρα ο πίνακας διαγωνοποιείται

$$A = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \Rightarrow A^{2n} = P \cdot \begin{bmatrix} 1^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^{2n} \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot I \cdot P^{-1} = I$$

**Άσκηση 5:** Α) Έστω  $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & a \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ . Για ποιά τιμή της παραμέτρου  $a$  ισχύει ότι ο βαθμός του πίνακα  $C$  είναι 2?

Β) Για την τιμή της  $a$  που βρήκατε στο ερώτημα (Α) να βρεθούν οι ιδιοτιμές του  $C$ . Κατόπιν να εξηγηθεί γιατί είναι ή δεν είναι α) διαγωνοποιήσιμος β) αντιστρέψιμος

**Λύση**

$$\mathbf{A)} C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & a \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & a-12 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -9 & a-12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & a-12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

Αν  $a=3$  ο βαθμός του πίνακα είναι 2.

**Β) Ιδιοτιμές**

$$\det(C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 6 & -\lambda & 3 \\ -4 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 0, \text{ ή } -\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$$

α) Διακριτές ιδιοτιμές άρα διαγωνοποιείται.

β)  $\det(C) = 0 \cdot (-2) \cdot 4 = 0$  άρα μὴ αντιστρέψιμος

**Άσκηση 6 :** Τα διανύσματα  $x_1 = (1 \ -1 \ 1)$ ,  $x_2 = (1 \ 1 \ 0)$ ,  $x_3 = (1 \ -1 \ 0)$  είναι τα ιδιοδιανύσματα ενός  $3 \times 3$  πίνακα  $A$ , αντίστοιχα των ιδιοτιμών  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$

α) Να προσδιοριστεί ο πίνακας  $A$  β) Να βρεθεί η ορίζουσα του γ) Ναδειχθεί ότι ισχύει  $A^{2n+1} = A$

**Λύση :** α) Ο πίνακας διαγωνοποιείται καθώς έχει διακριτές ιδιοτιμές, από την σχέση διαγωνοποίησης έχουμε

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_P \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β)  $\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot 0 = 0$

γ)  $A^{2n+1} = P \cdot \begin{bmatrix} 1^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0^{2n+1} \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = A$

**Άσκηση 7 :** Δίνεται ότι  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$

α) να βρεθεί η παράγωγος της  $y = \varphi(x)$  στο σημείο  $(4, 1)$ .

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της  $y = \varphi(x)$  που διέρχεται από το σημείο  $(4, 1)$

**Λύση:** α)  $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$  όπου

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2 \quad \text{άρα} \quad y' = -\frac{2x + 4}{2y + 2} \rightarrow y'_{(4,1)} = -\frac{2 \cdot 4 + 4}{2 \cdot 1 + 2} = -3$$

β) εξίσωση εφαπτομένης:  $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$  άρα  $y - 1 = -3 \cdot (x - 4) \rightarrow y = -3x + 13$

**Άσκηση 8 :** Αν  $\text{συν}(x^2 y) = x + y + yx^2 + y^3 x$ , να βρεθεί η παράγωγος  $y'(0)$

**Λύση:** Ορίζω την πεπλεγμένη σχέση  $f(x, y) = \text{συν}(x^2 y) - x - y - yx^2 - y^3 x = 0$

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{όπου}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\eta\mu(x^2 y)2xy - 1 - 0 - 2xy - y^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\eta\mu(x^2 y)x^2 - 0 - 1 - x^2 - 3y^2 x \end{aligned} \right\} \rightarrow y' = \frac{2xy\eta\mu(x^2 y) + 1 + 2xy + y^3}{-x^2\eta\mu(x^2 y) - 1 - x^2 - 3y^2 x}$$

Για  $x=0$  στην αρχική σχέση έχουμε  $\sigma\upsilon\nu(0) - y = 0 \Rightarrow y = \sigma\upsilon\nu(0) = 1$  άρα όταν  $x=0$ ,  $y=1$ .

$$y'(0) = \frac{\overset{x=0}{y=1} 1 + 1^3}{-1} = -2$$

**Άσκηση 9 :** Μελετήστε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση  $f(x, y) = xye^{-x-y}$ .

**Λύση** Συνθήκες 1<sup>ης</sup> τάξης :

$$f_x = 0 \Rightarrow ye^{-x-y} + xye^{-x-y}(-1) = 0 \Rightarrow ye^{-x-y}(1-x) = 0 \quad [1]$$

$$f_y = 0 \Rightarrow xe^{-x-y} + xye^{-x-y}(-1) = 0 \Rightarrow xe^{-x-y}(1-y) = 0 \quad [2]$$

Απο την [1] έχουμε  $y=0$  ή  $x=1$  ( υπενθύμιση τα εκθετικά είναι πάντα θετικά)

Για  $y=0$  ή [2] δίνει  $x=0$  άρα πρώτο κρίσιμο σημείο το  $(0,0)$

Για  $x=1$  η [2] δίνει  $y=1$  άρα δεύτερο κρίσιμο σημείο  $(1,1)$

Απο την [2] έχουμε  $y=1$  ή  $x=0$  ( υπενθύμιση τα εκθετικά είναι πάντα θετικά)

Για  $y=1$  ή [1] δίνει  $x=1$  άρα πάλι  $(1,1)$

Για  $x=0$  η [1] δίνει  $y=0$  άρα πάλι  $(0,0)$

Συνολικά έχουμε 2 κρίσιμα το  $(0,0)$  και το  $(1,1)$

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-x-y}y(2-x) & e^{-x-y}(1-x)(1-y) \\ e^{-x-y}(1-x)(1-y) & -e^{-x-y}x(2-y) \end{bmatrix}$$

Στο  $(0,0)$ ,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ σάγμα (ή σημείο σέλλας)}$$

Στο  $(1,1)$

$$H = \begin{bmatrix} -e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{bmatrix}$$

με ελάχισσες οριζουσες  $-e^{-2} < 0$  και  $\det H = (-e^{-2})(-e^{-2}) = e^{-2} > 0$  άρα αρνητικά ορισμένος, μέγιστο.

**Άσκηση 10 :** Μελετήστε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x, y, z) = x^2 - yx + 2zx + y^2 + 3z^2 + yz$

**Λύση:** Συνθήκες α τάξης

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 & (1) \\ -x + 2y + z = 0 & (2) \\ 2x + y + 6z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_1/2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \frac{3}{2}\Gamma_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Η λύση του ομογενούς συστήματος δίνει μοναδικό κρίσιμο σημείο το  $(0,0,0)$

Συνθήκες β τάξης  $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

$$f_{xx} = 2 > 0, \det \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \det H = 4 > 0$$

Άρα η  $f$  έχει ελάχιστο στο  $(0,0,0)$

**Άσκηση 11 :** Μια μονοπωλιακή επιχείρηση πωλεί το προϊόν της με συνάρτηση ολικού κόστους

$$TC = 2Q^2 + 3Q + 10 \text{ σε 2 αγορές με συναρτήσεις ζήτησης } \begin{cases} p_1 = 35 - 2Q_1 \\ p_2 = 53 - 3Q_2 \end{cases}$$

α) Ζητείται να προσδιοριστούν οι ποσότητες προϊόντος  $Q_1^*$  και  $Q_2^*$  που θα πρέπει να πωλούνται στις αγορές 1 και 2 και οι αντίστοιχες τιμές  $p_1^*$  και  $p_2^*$  έτσι ώστε η επιχείρηση να μεγιστοποιεί τα συνολικά κέρδη της.

β) Επιβεβαιώστε ότι στο σημείο  $(Q_1^*, Q_2^*)$  που μεγιστοποιούνται τα κέρδη της επιχείρησης τα οριακά μεγέθη εισοδήματος από την πώληση του προϊόντος σε κάθε μια από τις 2 αγορές, ισούνται με το οριακό κόστος παραγωγής των 2 προϊόντων.

γ) Να υπολογιστούν οι ελαστικότητες ζήτησης στα σημεία  $(Q_1^*, p_1^*)$  και  $(Q_2^*, p_2^*)$ . Τί παρατηρείτε με δεδομένο ότι  $p_1^* < p_2^*$

**Λύση :** α) Κατασκευάζουμε την συνάρτηση κέρδους και την μεγιστοποιούμε (προσοχή  $Q = Q_1 + Q_2$ )

$$\begin{aligned} \Pi(Q_1, Q_2) &= TR_1 + TR_2 - TC = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 - TC = (35 - 2Q_1)Q_1 + (53 - 3Q_2)Q_2 - (2(Q_1 + Q_2)^2 + 3(Q_1 + Q_2) + 10) = \\ &= \dots = 32Q_1 + 50Q_2 - 4Q_1^2 - 5Q_2^2 - 4Q_1Q_2 - 10 \end{aligned}$$

Συνθήκες 1<sup>ης</sup> τάξης

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{Q_1} = 0 \rightarrow 32 - 8Q_1 - 4Q_2 = 0 \\ \Pi_{Q_2} = 0 \rightarrow 50 - 10Q_2 - 4Q_1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_2 = 8 - 2Q_1 \\ 50 - 10(8 - 2Q_1) - 4Q_1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_2^* = 4,25 \\ Q_1^* = 1,875 \end{array} \right\}$$

Συνθήκες 2<sup>ης</sup> τάξης

$$H = \begin{bmatrix} \Pi_{Q_1 Q_1} & \Pi_{Q_1 Q_2} \\ \Pi_{Q_2 Q_1} & \Pi_{Q_2 Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -10 \end{bmatrix} \text{ με ελάσσονες ορίζουσες } -8 < 0 \text{ και } \det(H) = 64 > 0 \text{ άρα μέγιστο}$$

Κατόπιν απο τις συναρτήσεις ζήτησης βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές

$$p_1^* = 31,25 \text{ και } p_2^* = 40,25$$

β) Όταν ένα μονοπώλιο κάνει διαφορισμό τιμής σε 2 αγορές ισχύει πάντα ότι  $MR_1 = MR_2 = MC$

Πράγματι,

$$MR_1 = (TR_1)' = (35Q_1 - 2Q_1^2)' = 35 - 4Q_1 \text{ και στο μέγιστο } MR_1 = 35 - 4Q_1^* = 27,5$$

$$MR_2 = (TR_2)' = (53Q_2 - 3Q_2^2)' = 53 - 6Q_2 \text{ και στο μέγιστο } MR_2 = 53 - 6Q_2^* = 27,5$$

$$MC = (TC)' = (2Q^2 + 3Q + 10)' = 4Q + 3 \xrightarrow{Q=Q_1+Q_2} 4Q_1 + 4Q_2 + 3 \text{ και στο μέγιστο}$$

$$MC = 4Q_1^* + 4Q_2^* + 3 = 27,5$$

$$\gamma) \varepsilon_D = \frac{dQ}{dp} \cdot \frac{p}{Q}$$

Αγορά 1 : Βρίσκουμε την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης  $Q_1 = \frac{35}{2} - \frac{1}{2} p_1$

$$\text{άρα } \varepsilon_{D1} = \frac{dQ_1}{dp_1} \cdot \frac{p_1}{Q_1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{31,25}{1,875} = -8,33$$

Αγορά 2 : Βρίσκουμε την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης  $Q_2 = \frac{53}{3} - \frac{1}{3} p_2$

$$\text{άρα } \varepsilon_{D2} = \frac{dQ_2}{dp_2} \cdot \frac{p_2}{Q_2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{40,25}{4,25} = -3,15$$

Παρατηρούμε ότι η ζήτηση στην αγορά 1 είναι πιο ελαστική.

**Άσκηση 12 :** Βρείτε τα ακρότατα της  $f(x,y) = x^2 - y^2$  υπό τον περιορισμό  $x^2 + y^2 = 1$ .

$$\text{Λύση : } L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$L_x = 0 \Rightarrow 2x + 2\lambda x = 0 \Rightarrow 2x \cdot (1 + \lambda) = 0 \Rightarrow \mathbf{x=0 \text{ ή } \lambda=-1} \quad (1)$$

$$L_y = 0 \Rightarrow -2y + 2\lambda y = 0 \Rightarrow -2y \cdot (1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \mathbf{y=0 \text{ ή } \lambda=1} \quad (2)$$

$$L_\lambda = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad (3)$$

(1) Για  $x=0$ , από την (3)  $y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$  και για  $y=\pm 1$  (διάφορο του μηδενός) από την (2)  $\lambda=1$  άρα **κρίσιμα σημεία**  $\mathbf{A(0,1,1), B(0,-1,1)}$

(2) Για  $y=0$ , από την (3)  $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$  και για  $x=\pm 1$  (διάφορο του μηδενός) από την (1)  $\lambda=-1$  άρα **κρίσιμα σημεία**  $\mathbf{\Gamma(1,0,-1), \Delta(-1,0,-1)}$

Πλαισιωμένος Εσσιανός:  $L_{xx} = 2 - 2\lambda, L_{xy} = 0, L_{yy} = -2 - 2\lambda, g_x = 2x, g_y = 2y$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2+2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2+2\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |H| \xrightarrow{\text{γραμμική}} -2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & -2+2\lambda \end{vmatrix} + 2y \begin{vmatrix} 2x & 2+2\lambda \\ 2y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2x(-4x + 4\lambda x) + 2y(-4y + 4\lambda y) = 8x^2 - 8\lambda x^2 - 8y^2 - 8\lambda y^2$$

Συνεπώς

$$|H|_{A(0,1,1)} = 0 + 0 - 8 - 8 = -16 < 0 \text{ άρα τ.ελάχιστο}, |H|_{B(0,-1,1)} = 0 + 0 - 8 - 8 = -16 < 0 \text{ άρα τ.ελάχιστο}$$

$$|H|_{\Gamma(1,0,-1)} = 8 + 8 - 0 - 0 = 16 > 0 \text{ άρα τ.μέγιστο}, |H|_{\Delta(-1,0,-1)} = 8 + 8 - 0 - 0 = 16 > 0 \text{ άρα τ.μέγιστο},$$

**Άσκηση 13**: Μια επιχείρηση έχει συνάρτηση ολικών κερδών που δίνεται από τον παρακάτω τύπο  $p(x, y) = -4x^2 - 5y^2 + 20xy$ , όπου  $x$  και  $y$  είναι οι πωλούμενες ποσότητες των προϊόντων. Για την παραγωγή κάθε μονάδας των προϊόντων  $x$  και  $y$  απαιτούνται 2 μονάδες και 5 μονάδες μιας πρώτης ύλης αντίστοιχα. Η πρώτη ύλη διατίθεται σε 40 μονάδες.

α) Να βρεθούν τα  $x, y$  όπου η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα κέρδη της υπό τον περιορισμό παραγωγής, καθώς και τα μέγιστα κέρδη.

β) Να υπολογίσετε πόσο θα αυξηθεί το μέγιστο κέρδος αν η διαθέσιμη ποσότητα της πρώτης ύλης αυξηθεί από 40 σε 42,44 και 46 μονάδες.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

Διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης	Βέλτιστες πωλούμενες ποσότητες
42	$X=63/8 \quad y=21/4$
44	$X=33/4 \quad y=11/2$
46	$X=69/8 \quad y=23/4$

γ) Υπολογίστε την μέγιστη τιμή αγοράς που μπορεί να δεχθεί η επιχείρηση για την απόκτηση των επιπρόσθετων μονάδων πρώτης ύλης.

δ) Ισχύει  $dp = -\lambda \cdot db$ , όπου  $dp$  η μεταβολή της βέλτιστης τιμής της συνάρτησης κέρδους,  $\lambda$  η τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange και  $db$  η μεταβολή της σταθεράς του δεσμού. Να συγκρίνετε την τιμή της προσέγγισης με αυτή του ερωτήματος γ) τί παρατηρείτε?

**Λύση**: Μεγιστοποίηση του κέρδους  $p(x, y) = -4x^2 - 5y^2 + 20xy$  υπό τον περιορισμό (δεσμός)  $2x + 5y = 40$

Λαγκρατζιανή:  $L(x, y, \lambda) = -4x^2 - 5y^2 + 20xy + \lambda(2x + 5y - 40)$

Συνθήκες 1<sup>ης</sup> τάξης:

$$L_x = 0 \rightarrow -8x + 20y + 2\lambda = 0 \quad [1]$$

$$L_y = 0 \rightarrow -10y + 20x + 5\lambda = 0 \quad [2]$$

$$L_\lambda = 0 \rightarrow 2x + 5y = 40 \quad [3]$$

Το σύστημα των 3 εξισώσεων έχει μοναδική λύση  $(x, y, \lambda) = (7.5, 5, -20)$

Συνθήκες 2<sup>ης</sup> τάξης :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -8 & 20 \\ 5 & 20 & -10 \end{bmatrix} \text{ έχουμε ότι } \det(H) = 640 > 0 \text{ άρα μέγιστο}$$

Άρα μέγιστα κέρδη  $p(7.5, 5) = 400$

β) Βάση του πίνακα τα μέγιστα κέρδη ανα περίπτωση είναι :

$p(63/8, 21/4) = 446,25$  άρα αύξηση 46,25 και αυτή είναι η μέγιστη τιμή αγοράς των 2 επιπρόσθετων μονάδων πρώτης ύλης

Αντίστοιχα για τα υπόλοιπα σημεία

γ) έγινε

δ) Απο 40 σε 42 db=2 άρα  $dp = -\lambda \cdot db = 20 \cdot 2 = 40$  καλή προσέγγιση δεδομένου ότι η πραγματική μεταβολή στα μέγιστα κέρδη είναι 46,25.

Αντίστοιχα για τα υπόλοιπα σημεία

**Άσκηση 14 :** Βρείτε τα ακρότατα της  $f(x, y, z) = 3x + y + z^2$  όταν ισχύουν οι περιορισμοί  $y + z = 3, x + z = 4$ .

**Λύση:** Περιορισμοί  $g_1(x, y, z) = y + z$  και  $g_2(x, y, z) = x + z$

$$L = 3x + y + z^2 - \lambda_1(y + z - 3) - \lambda_2(x + z - 4)$$

$$L_x = 3 - \lambda_2 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 3$$

$$L_y = 1 - \lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$L_z = 2z - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \rightarrow z = \frac{3+1}{2} = 2 \quad \text{Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο } (2, 1, 2)$$

$$L_{\lambda_1} = y + z = 3 \rightarrow y = 1$$

$$L_{\lambda_2} = x + z = 4 \rightarrow x = 2$$

Πλαισιωμένος Εσσιανός:  $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ 0 & 0 & g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{1x} & g_{2x} & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_{1y} & g_{2y} & L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_{1z} & g_{2z} & L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ορίζουσα εσσιανού:  $\xrightarrow{4\text{η γραμμή}} -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{3\text{η γραμμή}} -1 \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{3\text{η γραμμή}} -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$

Άρα έχουμε ελάχιστο

**ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΝΗΜΕΡΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΝΕΑ POST ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ [FACEBOOK](https://www.facebook.com/didaskaleio.foititiko)**