Άσκηση : Έστω μια ανταγωνιστική επιχείρηση που χρησιμοποιεί εργασία (L) και κεφάλαιο (K) και έχει συνάρτηση παραγωγής $Y(L,K)=2L^{1/2}+K^{1/2}$.

α) Τι αποδόσεις κλίμακας παρουσιάζει η επιχείρηση? Δείξτε ποια θα είναι η μορφή της συνάρτησης μέσου κόστους (AC).

β) Αν η τιμή της εργασίας είναι w, η τιμή του κεφαλαίου είναι r και η τιμή πώλησης του προϊόντος είναι σταθερή και ίση με p, να βρείτε τις συναρτήσεις ζήτησης της εργασίας και του κεφαλαίου.

γ) Να εξάγετε τη συνάρτηση προσφοράς και την συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης

δ) Χωρίς να βρείτε τις υπό συνθήκη συναρτήσεις ζήτησης, να βρείτε ποιες είναι οι τιμές τους όταν w=1 , r=1/4 και η επιχείρηση έχει ως στόχο να παράγει επίπεδο προϊόντος ίσο με Y=8.

ε) Να βρείτε τις υπό συνθήκη συναρτήσεις ζήτησης για εργασία και κεφάλαιο και να επαληθεύσετε την απάντηση σας.

ΛΥΣΗ

α) βαθμός ομογένειας ½ <1 άρα φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας και κατ επέκταση φθίνουσες οικονομίες κλίμακας άρα το μέσο κόστος AC είναι αύξων.

β)

$$\Pi = p\cdot Q(L,K)\underbrace{-wL-rK}_{production\ \ cost}=p\cdot\left(2L^{1/2}+K^{1/2}\right)-wL-rK$$

Οι συναρτήσεις ζήτησης αντλούνται με κριτήριο την μεγιστοποίηση του κέρδους, ήτοι

- $$\frac{\partial\Pi}{\partial L}=0\xrightarrow{K\ \sigma\tau\alpha\theta.}p\cdot L^{-1/2}=w\rightarrow L^{-1/2}=\frac{w}{p}\xrightarrow{*}L=\left(\frac{w}{p}\right)^{-2}\rightarrow \boxed{L(p,w,r)=\frac{p^2}{w^2}}$$

Για διάφορους συνδυασμούς, τιμής, ωρομισθίου και επιτοκίου δίνει την βέλτιστη ποσότητα της εισροής εργασία, ζήτηση για εργασία . Παρατηρείστε ότι δεν εξαρτάται από το επιτόκιο.

- $$\frac{\partial\Pi}{\partial K}=0\xrightarrow{L\ \sigma\tau\alpha\theta.}\frac{1}{2}p\cdot K^{-1/2}=r\rightarrow K=\left(\frac{2r}{p}\right)^{-2}\rightarrow K=\left(\frac{2r}{p}\right)^{-2}\rightarrow\boxed{K(p,w,r)=\frac{p^2}{4r^2}}$$

γ) Συνάρτηση προσφοράς και συνάρτηση κέρδους

<u>προσφοράς:</u>

$$Q^*=Q\left(L^*,K^*\right)=S(p,w,r)=2\cdot\left(\frac{p^2}{w^2}\right)^{1/2}+\left(\frac{p^2}{4r^2}\right)^{1/2}\rightarrow\boxed{S(p,w,r)=2\frac{p}{w}+\frac{p}{2r}}$$

Η προσφορά της επιχείρησης είναι ανάλογη της τιμής πώλησης του προϊόντος (νόμος προσφοράς) και συνδέεται αρνητικά με το κόστος των εισροών.

<u>κέρδους:</u>

$$\Pi^*=\Pi\left(Q^*,L^*,K^*\right)=\Pi(p,w,r)=\frac{p^2}{w}+\frac{1}{4}\frac{p^2}{r}$$

<u>Extra : Hoteling</u> (Συμβολισμοί Nicholson)

- $$\frac{\partial\Pi(p,w,r)}{\partial p}=Q^*=S(p,w,r):\frac{\partial\Pi}{\partial p}=\frac{2p}{w}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{r}\quad \varepsilon\pi\alpha\lambda\acute{\eta}\theta\varepsilon\upsilon\sigma\eta$$
- $$\frac{\partial\Pi(p,w,r)}{\partial w}=-L(p,w,r):\frac{\partial\Pi}{\partial w}=-\frac{p^2}{w^2}\quad \varepsilon\pi\alpha\lambda\acute{\eta}\theta\varepsilon\upsilon\sigma\eta$$
- $$\frac{\partial\Pi(p,w,r)}{\partial r}=-K(p,w,r):\frac{\partial\Pi}{\partial r}=-\frac{1}{4}\frac{p^2}{r^2}\quad \varepsilon\pi\alpha\lambda\acute{\eta}\theta\varepsilon\upsilon\sigma\eta$$

δ) w=1 , r=1/4 , Q=8 και από την συνάρτηση προσφοράς βρίσκουμε την τιμή p

$$8 = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2p}{1} \rightarrow p = 2$$

Συνεπώς, $L^{\Pi AP}(p, w, r,) = L(2,1,1/4) = \frac{2^2}{1^2} = 4$ και $K(2,1,1/4) = 16$

ε) Παράγωγες Συναρτήσεις Ζήτησης

Ζητούμενο : Ποιο το ελάχιστο κόστος παραγωγής ποσότητας Y_0?

$$\min C(Y) = w \cdot L + r \cdot K$$

$$s.t. \quad Y(L, K) = 2L^{1/2} + K^{1/2} = Y_0$$

Λαγκρατζιανή : $\Lambda(K, L, \lambda) = wL + rK + \lambda\left(Y_0 - 2L^{1/2} - K^{1/2}\right)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial L} &= 0 \rightarrow w = \lambda \cdot L^{-1/2} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial K} &= 0 \rightarrow r = \frac{1}{2}\lambda \cdot K^{-1/2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\delta\iota\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\sigma\eta} \frac{K^{1/2}}{L^{1/2}} = \frac{w}{2r} \quad (1) \quad MRTS$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow Y_0 = 2L^{1/2} + K^{1/2} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (1) στην (2) έχουμε

$$2L^{1/2} + L^{1/2} \cdot \frac{w}{2r} = Y_0 \rightarrow \boxed{L^{\Pi AP}(w, r, Y_0) = Y_0^2 \cdot \left(\frac{2r}{w + 4r}\right)^2}$$

και αντικαθιστώντας στην (1)

$$K^{1/2} = \sqrt{Y_0^2 \cdot \left(\frac{2r}{w+4r}\right)^2} \cdot \frac{w}{2r} \rightarrow \boxed{K^{\Pi AP}(w, r, Y_0) = Y_0^2 \cdot \left(\frac{w}{w+4r}\right)^2}$$

Πράγματι, $L^{\Pi AP}(1, 1/4, 8) = 4$ και $K^{\Pi AP}(1, 1/4, 8) = 16$

<u>**Έξτρα** : Shephard</u>

Μακροχρόνια συνάρτηση κόστους: $C(w, r, Y) = w \cdot L(w, r, Y) + r \cdot K(w, r, Y)$

Λήμμα Shephard : Από μακροχρόνιο κόστος εξάγονται οι παράγωγες συναρτήσεις ζήτησης

- $\frac{\partial C(w, r, Y)}{\partial w} = L(w, r, Y)$ και • $\frac{\partial C(w, r, Y)}{\partial r} = K(w, r, Y)$

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΝΗΜΕΡΩΣΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ FACEBOOK