Άσκηση : Έστω μια 2x2 συμμετρική μήτρα $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ να δείξετε ότι :

α) Οι ιδιοτιμές της A είναι πραγματικές
β) Αν a=c, προσδιορίστε υπό ποια συνθήκη οι ιδιοτιμές είναι ίσες.
γ) Αν a=c=1 και b=2
i) Να διαγωνοποιηθεί με P ορθογώνιο ώστε $P^{-1}=P'$
ii) Να υπολογιστεί η μήτρα A^{2046}

Απάντηση:

α)

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (a-\lambda)(c-\lambda)-b^2=0 \Rightarrow \lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(a-c)^2+4b^2\geq 0$ άρα δεν έχει μιγαδικές ιδιοτιμές

β) Αν a=c, τότε $\Delta=4b^2$ άρα οι ιδιοτιμές θα είναι:

$$\lambda_{1,2}=\frac{a+c\pm\sqrt{4b^2}}{2}=\begin{cases} \dfrac{a+c+2b}{2} \\ \dfrac{a+c-2b}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{ίσες}} b=0$$

γ) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

i) Βάση των παραπάνω
$\lambda_1=3$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{v}_1=(1,1)$
$\lambda_2=-1$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{v}_2=(1,-1)$

Παρατηρείστε ότι η μήτρα είναι αόριστη $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$ καθώς και ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια και αρκεί να τα διαιρέσουμε με το μέτρο τους ώστε να γίνουν ορθομοναδιαία.

Συνεπώς,

$$\|\tilde{v}_1\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \qquad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \tilde{v}_1^*=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\|\tilde{v}_2\|=\sqrt{2} \qquad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \tilde{v}_2^*=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

<u>Διαγωνοποίηση</u>:

$$A=PDP^{-1}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$$

ii) $A^{2046}=PD^{2046}P^{-1}=P\cdot\begin{bmatrix} 3^{2046} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^T$

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΙΔΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ FACEBOOK