

2017 Ιούνιος**ΘΕΜΑ 1**

Με τη μέθοδο OLS εκτιμήθηκε το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$(1) \quad Y_i = \beta_0 + \beta_1 M_i + \beta_2 S_i + u_i$$

όπου Y είναι το ωρομίσθιο (σε ευρώ €), M είναι το φύλο (με $M_i = 1$ αν το i άτομο είναι άνδρας και $M_i = 0$ αλλού) και S είναι η εκπαίδευση (σε έτη). Με βάση ένα δείγμα 25 ατόμων βρέθηκε ότι

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad SSR = 0,28, \quad SST = 0,5$$

α) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί η εκτιμώμενη γραμμή παλινδρόμησης. Να βρεθεί και να ερμηνευτεί ο συντελεστής προσδιορισμού.

β) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί ο εκτιμώμενος πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών.

γ) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί το 95% διάστημα πρόβλεψης για το μέσο ωρομίσθιο μίας γυναίκας με 10 έτη εκπαίδευσης.

δ) (βαθμοί: 1) Έστω τώρα ότι εκτιμήθηκε με τη μέθοδο OLS η ακόλουθη παλινδρόμηση

$$(2) \quad \hat{Y}_i = 5,5 + 8,2 M_i + 3,7 S_i - 0,1 M_i \cdot S_i, \quad SSR = 0,29$$

(0,2) (0,3) (0,5) (0,2)

όπου οι αριθμοί σε () είναι τυπικά σφάλματα. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τις ιδιότητες των εκτιμητών των συντελεστών του υποδείγματος (1) και για το διάστημα πρόβλεψης του ερωτήματος γ);

ε) (βαθμοί: 1) Τι θα άλλαζε στις απαντήσεις των ερωτημάτων α) και γ) αν το ωρομίσθιο ήταν μετρημένο σε δολάρια \$; Δίνεται ότι η συναλλαγματική ισοτιμία ευρώ-δολαρίου είναι 1€=1,1\$. Αιτιολογείστε.

Απάντηση:

Παρατήρηση: Όταν αντιστρέφουμε διαγώνιο πίνακα, απλά αντιστρέφουμε τα διαγώνια στοιχεία.

$$\alpha) \quad \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{άρα η γραμμή είναι } Y = 5 + 8M + 4S$$

$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{0,28}{0,5} = 0,56$ άρα το 56% της μεταβλητότητας του ωρομισθίου ερμηνεύεται από την ευθεία παλινδρόμησης.

$$\beta) \quad \hat{V}(\hat{\beta}) = s^2 (X'X)^{-1} = 0,01 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 \end{bmatrix}$$

$$s^2 = \frac{SSE}{n-k-1} = \frac{0,22}{25-2-1} = 0,01$$

Έξτρα 1: Να ελεγχθεί αν $2\beta_1 = 3\beta_2 + 3$

Απάντηση:

$$H_0: 2\beta_1 - 3\beta_2 = 3$$

$$H_1: 2\beta_1 - 3\beta_2 \neq 3$$

$$t = \frac{2\beta_1 - 3\beta_2 - 3}{\sqrt{\text{Var}(2\beta_1 - 3\beta_2)}} = \frac{2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 3}{\sqrt{0,52}} = \frac{1}{0,72} = 1,38$$

$$\text{Var}(2\beta_1 - 3\beta_2) = 4V(\beta_1) + 9V(\beta_2) + 2 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot \text{Cov}(\beta_1, \beta_2) = 4 \cdot 0,04 + 9 \cdot 0,04 - 12 \cdot 0 = 0,52$$

$|t| = 1,38 < t_{n-k-1, \alpha/2} = t_{22, 0,025} = 2,074$ άρα δεν απορρ. η H_0 συνεπώς ισχύει ότι $2\beta_1 = 3\beta_2 + 3$

Εξτρα 2 : Αν στο υπόδειγμα (1) περιλαμβάναμε και την ψευδομεταβλητή D όπου D=1 για γυναίκα και D=0 αλλιώς, θα υπήρχε κάποιο πρόβλημα με την εκτίμηση της (1)?

Απάντηση:

Θα είχαμε τέλεια πολυσυγραμμικότητα μεταξύ M και D καθώς M+D=1 άρα δεν θα μπορούσε να εφαρμοστεί η μέθοδος OLS.

Εξτρα 3 : Να ελεγχθεί αν το μέσο ωρομίσθιο ενός άντρα είναι μεγαλύτερο κατα τουλάχιστον 4 € σε σχέση με μία γυναίκα με τα ίδια χρόνια εκπαίδευσης.

Απάντηση:

$$H_0: \beta_1 = 4 \quad t = \frac{\beta_1 - c}{s_{\beta_1}} = \frac{8 - 4}{\sqrt{4}} = 2$$

$$H_1: \beta_1 > 4$$

$t = 2 > t_{n-k-1, \alpha} = t_{22, 0.05} = 1,717$ άρα απορρ. η H_0 συνεπώς το ωρομίσθιο του άντρα ξεπερνάει αυτό της γυναίκας κατα τουλάχιστον 4€.

γ) Γυναίκας με 10 έτη εκπαίδευσης άρα M=0 και S=10

$$\hat{Y}_f = 5 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 10 = 45$$

$$X_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$s_{E(\hat{Y}_f)}^2 = s^2 [X_f' (X'X)^{-1} X_f] = 0,01 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} =$$

$$= 0,01 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = 0,01 \cdot 401 = 4,01$$

Άρα το 95% ΔΠ είναι :

$$\hat{Y}_f \pm t_{n-k-1, \alpha/2} s_{E(\hat{Y}_f)} = 45 \pm 2,074 \cdot \sqrt{4,01} = 45 \pm 4,153 = (40,85, 49,15)$$

δ) F έλεγχος γραμμικών περιορισμών μέσω περιορισμένου υποδείγματος.

$$U \quad (2) \quad Y = \beta_0 + \beta_1 M + \beta_2 S + \beta_3 M \cdot S$$

$$R \quad (1) \quad Y = \beta_0 + \beta_1 M + \beta_2 S$$

$$H_0: \beta_3 = 0$$

$$H_1: \beta_3 \neq 0$$

$$F = \frac{(SSE_R - SSE_U) / q}{SSE_U / (n - k - 1)} = \frac{(0,22 - 0,21) / 1}{0,21 / (25 - 3 - 1)} = \frac{0,01}{0,21 / 21} = 1$$

$F = 1 < F_{q, n-k-1, \alpha} = F_{1, 21, 0.05} = 4,325$ άρα δεν απορρ. η H_0 συνεπώς καλύτερο υπόδειγμα το (1)

Ιδιότητες : γραμμικοί, αμερόληπτοι, συνεπείς και αποτελεσματικοί. Διαστημα πρόβλεψης αξιόπιστο.

Παρατήρηση: Αν είχε επικρατήσει το υπόδειγμα (2) τότε στο (1) θα είχαμε σφάλμα εξειδίκευσης οπότε οι εκτιμητές θα ήταν μερόληπτοι και το ΔΠ αναξιόπιστο.

ε) Αλλαγή στις μονάδες μέτρησης

$$Y^* = \lambda_Y Y = 1,1 \cdot Y \text{ άρα}$$

$$\hat{\beta}_0^* = 1,1 \cdot \hat{\beta}_0 = 1,1 \cdot 5 = 5,5$$

$$\hat{\beta}_1^* = 1,1 \cdot \hat{\beta}_1 = 1,1 \cdot 8 = 8,8$$

$$\hat{\beta}_2^* = 1,1 \cdot \hat{\beta}_2 = 1,1 \cdot 4 = 4,4$$

Άρα η γραμμή θα ήταν $Y = 5,5 + 8,8M + 4,4S$

Επίσης το ΔΠ θα ήταν πολλαπλασιασμένο επί 1,1
 $1,1 \cdot (40,85, 49,15) = (44,93, 54,06)$

Παρατήρηση: Το παραπάνω ισχύει καθώς και το $\hat{Y}_f$ και το $s_{E(\hat{Y}_f)}$ πολλαπλασιάζονται επί 1,1.

ΘΕΜΑ 2

Με τη μέθοδο OLS εκτιμήθηκε το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$i_t = \beta_0 + \beta_1 \pi_t + \beta_2 g_t + u_t$$

όπου i είναι το επιτόκιο (σε %), π είναι ο πληθωρισμός (σε %) και g είναι ο ρυθμός ανάπτυξης (σε %). Με βάση ένα δείγμα 43 παρατηρήσεων βρέθηκε ότι

$$(1) \quad \hat{i}_t = 2,21 + 1,09 \pi_t + 0,12 g_t, \quad R^2 = 0,6, \quad SSR = 60$$

(0,11) (0,02) (0,06)

$$(2) \quad \hat{u}_t^2 = 0,25 - 0,01 \pi_t + 0,02 \pi_t^2 + 0,03 g_t + 0,25 g_t^2 - 0,02 \pi_t g_t, \quad R^2 = 0,2$$

$$(3) \quad \hat{u}_t = 0,05 + 0,01 \pi_t - 0,02 g_t - 0,65 \hat{u}_{t-1}, \quad R^2 = 0,5$$

όπου οι αριθμοί σε () είναι τυπικά σφάλματα.

α) (βαθμοί: 1) Να ελεγχθεί στατιστικά αν η επίδραση του ρυθμού ανάπτυξης στο επιτόκιο είναι αρνητική. ($\alpha=0,05$).

β) (βαθμοί: 1). Έστω ότι εκτιμήθηκε με τη μέθοδο OLS το ακόλουθο υπόδειγμα παλινδρόμησης:

$$(4) \quad \hat{r}_t = 2,3 + 0,13 g_t, \quad SSE = 60$$

(0,05) (0,01)

όπου $r = i - \pi$ είναι το πραγματικό επιτόκιο (σε %) και οι αριθμοί σε () είναι τυπικά σφάλματα.

Ποιά υπόθεση μπορεί να ελεγχθεί με βάση τα υποδείγματα (1) και (4); Να γίνει ο σχετικός στατιστικός έλεγχος. ($\alpha=0,05$).

γ) (βαθμοί: 2) Ποιές υποθέσεις μπορούν να ελεγχθούν με βάση τα υποδείγματα (2) και (3); Να γίνουν οι σχετικοί στατιστικοί έλεγχοι. ($\alpha=0,05$). Τι συμπεραίνετε για τις ιδιότητες των εκτιμητών των συντελεστών του υποδείγματος (1); Ποιές είναι οι συνέπειες στον στατιστικό έλεγχο των ερωτημάτων α) και β);

δ) (βαθμοί: 1) Έστω τώρα ότι στο υπόδειγμα (1) ισχύει ότι $Corr(\pi_t, i_{t-1}) = -0,7$. Λαμβάνοντας υπ' όψη και το αποτέλεσμα των στατιστικών ελέγχων στο ερώτημα γ), τι συμπεραίνετε για τις ιδιότητες των εκτιμητών των συντελεστών του υποδείγματος (1); Αιτιολογείστε.

Απάντηση:

α)

$$H_0: \beta_2 = 0 \quad t = \frac{\beta_2}{s_{\beta_2}} = \frac{0,12}{0,06} = 2$$

$$H_1: \beta_2 < 0$$

$t = 2 > -t_{n-k-1, \alpha} = -t_{40, 0,05} \approx -z_{0,05} = -1,645$ άρα δεν απορρ. η H_0 συνεπώς η επίδραση δεν είναι αρνητική.

β) F έλεγχος γραμμικών περιορισμών μέσω περιορισμένου υποδείγματος.

$$U \quad (1) \quad i = \beta_0 + \beta_1 \pi + \beta_2 g$$

$$R \quad (4) \quad i - \pi = \beta_0 + \beta_2 g$$

$$H_0: \beta_1 = 1$$

$$H_1: \beta_1 \neq 1$$

$$F = \frac{(SSE_R - SSE_U) / q}{SSE_U / (n - k - 1)} = \frac{(0,22 - 0,21) / 1}{0,21 / (25 - 3 - 1)} = \frac{0,01 / 1}{0,21 / 21} = 1$$

$F = 1 < F_{q, n-k-1, \alpha} = F_{1, 21, 0,05} = 4,325$ άρα δεν απορρ. η H_0 συνεπώς καλύτερο υπόδειγμα το (4)
Επίσης η επίδραση του πληθωρισμού είναι στατιστικά ίση με 1.

γ) Με το υπόδειγμα (2) έλεγχος ετεροσκεδαστικότητας BPG

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0 \text{ με εναλλακτική}$$

$$H_1: \text{υπάρχιστον ένα } \alpha_j \neq 0, j = 1, 2, \dots, 5,$$

$BPG = n \cdot R^2 = 43 \cdot 0,2 = 8,6 < X_{5,0,05}^2 = 11,07$ άρα δεν απορρίπτεται η H_0 συνεπώς δεν έχουμε ετεροσκεδαστικότητα της παραπάνω μορφής στα σφάλματα.

Με το υπόδειγμα (3) έλεγχος αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξης BG

$$H_0: \rho_1 = 0$$

$$H_1: \rho_1 \neq 0$$

$BG = (n - m) \cdot R^2 = (42 - 1) \cdot 0,5 = 20,5 > X_{1,0,05}^2 = 3,841$ άρα απορρίπτεται η H_0 συνεπώς έχουμε αυτοσυσχέτιση 1^{ης} τάξης στα σφάλματα. Άρα οι εκτιμητές χάνουν την αποτελεσματικότητά τους.

Άρα οι ιδιότητες των εκτιμητών είναι: γραμμικοί, αμερόληπτοι, συνεπείς και μη αποτελεσματικοί. Άρα οι t και F έλεγχοι των ερωτημάτων (α) και (β) είναι αναξιόπιστοι.

δ) Απο την δοσμένη σχέση καταλαβαίνουμε ότι η ερμηνευτική μεταβλητή π σχετίζεται με τα σφάλματα, άρα οι εκτιμητές χάνουν την συνέπεια τους.

Έτσι οι ιδιότητες των εκτιμητών είναι: γραμμικοί, αμερόληπτοι, ασυνεπείς και μη αποτελεσματικοί.

Έξτρα: Πώς θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης?

Απάντηση: Μεταχηματισμός Cochrane-Orcutt

Δίνεται ότι: $Z_{0,05}=1,645$, $Z_{0,025}=1,96$, $t_{20,0,05}=1,725$, $t_{20,0,025}=2,086$, $t_{21,0,05}=1,721$, $t_{21,0,025}=2,08$, $t_{22,0,05}=1,717$, $t_{22,0,025}=2,074$, $F_{1,20,0,05}=4,351$, $F_{1,21,0,05}=4,325$, $F_{1,22,0,05}=4,301$, $F_{2,20,0,05}=3,493$, $F_{2,21,0,05}=3,467$, $F_{2,22,0,05}=3,443$, $F_{1,38,0,05}=4,098$, $F_{1,39,0,05}=4,091$, $F_{1,40,0,05}=4,085$, $F_{1,41,0,05}=4,079$, $F_{2,38,0,05}=3,245$, $F_{2,39,0,05}=3,238$, $F_{2,40,0,05}=3,232$, $F_{2,41,0,05}=3,226$, $\chi^2_{1,0,05}=3,841$, $\chi^2_{2,0,05}=5,991$, $\chi^2_{3,0,05}=7,815$, $\chi^2_{4,0,05}=9,488$, $\chi^2_{5,0,05}=11,07$, $d_{L,0,05}=1,17$, $d_{U,0,05}=1,54$.

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΙΔΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΝΕΑ POST, ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ [FACEBOOK](https://www.facebook.com/didaskaleio)