

Φεβρουάριος 2018 (Λεβεντίδης)

Θέμα 1^ο (ελαστικότητα) α) Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Να δείχθει ότι η ελαστικότητα του πηλίκου $\frac{f}{g}$ είναι ίση με τη διαφορά $\varepsilon_{\frac{f}{g}}(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)$. (β) Χρησιμοποιώντας το (α), να υπολογιστεί η ελαστικότητα της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^{1000}}$.

Θέμα 2^ο (ολοκληρώματα) (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int (\sin^3 x + x \ln x) dx$. (β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha < 0$ ισχύει $2 \int_0^{+\infty} x e^{\alpha x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx$.

Θέμα 3^ο (σειρές) (α) Να αποδειχθεί η σχέση $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. (β) Να υπολογιστεί η σειρά Taylor με κέντρο το 1 της συνάρτησης $f(x) = x^4$.

Θέμα 4^ο (οικονομικές συναρτήσεις) (α) Έστω μονοπώλιο με συνάρτηση ζήτησης P η οποία δίνεται από τον τύπο $P(Q) = \alpha - bQ$, $\alpha \in (0, +\infty)$, $b \in (0, +\infty)$. Το συνολικό κόστος δίνεται από τη συνάρτηση C με τύπο $C(Q) = Q^2 + 1$. Να βρεθεί η ποσότητα του προϊόντος η οποία μεγιστοποιεί το κέρδος του μονοπωλίου. (β) Το συνολικό κόστος παραγωγής μιας επιχείρησης δίνεται από τη συνάρτηση C με τύπο $C(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 111Q + 50$. Η συνάρτηση ζήτησης είναι η $Q = 100 - P$. Να γραφτεί το κέρδος της επιχείρησης ως συνάρτηση της ποσότητας Q . Ποιό είναι το μέγιστο κέρδος?

Θέμα 5^ο (διαφορικά) Με τη χρήση διαφορικών να υπολογιστεί ο αριθμός $\sqrt[3]{26}$. Με τη χρήση διαφορικών να υπολογιστεί ο αριθμός $\ln(1,01)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο (ελαστικότητα) α) Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ναδειχθεί ότι η ελαστικότητα του πηλίκου $\frac{f}{g}$ είναι ίση με τη διαφορά $\varepsilon_{\frac{f}{g}}(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)$. (β) Χρησιμοποιώντας το (α), να υπολογιστεί η ελαστικότητα της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^{1000}}$.

Απάντηση: α) $\varepsilon_{\frac{f}{g}} = \frac{d(f/g)}{dx} \cdot \frac{x}{f/g} = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2} \right) \cdot \frac{xg}{f/g} = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2} \right) \cdot \frac{xg}{f} = \frac{f'x}{f} - \frac{g'x}{g} = \varepsilon_f - \varepsilon_g$

β) $\varepsilon_f = \varepsilon_{\frac{e^x + e^{-x}}{x^{1000}}} = \varepsilon_{e^x + e^{-x}} - \varepsilon_{x^{1000}} \quad (1)$

$$\varepsilon_{e^x + e^{-x}} = (e^x + e^{-x})' \cdot \frac{x}{e^x + e^{-x}} = (e^x - e^{-x}) \cdot \frac{x}{e^x + e^{-x}}$$

$$\varepsilon_{x^{1000}} = (x^{1000})' \cdot \frac{x}{x^{1000}} = 1000x^{999} \cdot \frac{x}{x^{1000}} = 1000$$

Άρα λόγω της (1) $\varepsilon_f = (e^x - e^{-x}) \cdot \frac{x}{e^x + e^{-x}} - 1000$

Θέμα 2^ο (ολοκληρώματα) (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int (\sin^3 x + x \eta \mu x) dx$. (β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $a < 0$ ισχύει $2 \int_0^{+\infty} x e^{ax^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{ax} dx$.

Απάντηση: α) $I = \int (\sin^3 x + x \eta \mu x) dx = \int \sin^3 x dx + \int x \eta \mu x dx \quad (1)$

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \eta \mu^2 x} \int (1 - \eta \mu^2 x) \cdot \sin x dx$$

Θέτω $u = \eta \mu x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ και έχω

$$\int (1 - u^2) \cdot \sin x \cdot \frac{du}{\cos x} = \int (1 - u^2) du = u - \frac{u^3}{3} \xrightarrow{u = \eta \mu x} \eta \mu x - \frac{\eta \mu^3 x}{3}$$

$$\int x \eta \mu x dx = \int x (-\sin x)' dx = -x \cos x - \int (x)' (-\sin x) dx = -x \cos x + \int \sin x dx = -x \cos x + \eta \mu x$$

άρα από την (1) έχουμε $I = \eta \mu x - \frac{\eta \mu^3 x}{3} - x \cos x + \eta \mu x = -\frac{\eta \mu^3 x}{3} - x \cos x$

β) $\int_0^{+\infty} e^{ax} dx = \left[\frac{e^{ax}}{a} \right]_0^{+\infty} \xrightarrow{a < 0} 0 - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a} \quad (1)$

$$2 \int_0^{+\infty} x e^{ax^2} dx$$

$$\text{Θέτω } u = ax^2 \Rightarrow du = 2ax dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2ax}$$

$$\text{Για } x=0 \rightarrow u=0$$

$$\text{Για } x=+\infty \rightarrow u=-\infty$$

$$\text{Άρα } 2 \int_0^{+\infty} x e^{ax^2} dx = 2 \int_0^{-\infty} x e^u \frac{du}{2ax} = \frac{1}{a} \int_0^{-\infty} e^u du = \frac{1}{a} \left[e^u \right]_0^{-\infty} \xrightarrow{a < 0} \frac{1}{a} (0 - 1) = -\frac{1}{a} \quad (2)$$

$$\text{Άρα από τις (1) και (2) } 2 \int_0^{+\infty} x e^{ax^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{ax} dx = -\frac{1}{a}$$

Θέμα 3^ο (σειρές) (α) Να αποδειχθεί η σχέση $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. (β) Να υπολογιστεί η σειρά Taylor με κέντρο το 1 της συνάρτησης $f(x) = x^4$

Απάντηση: α) Ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x$ με κέντρο το 0.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\beta) f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 \quad (1)$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f(1) = 1, \quad f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(1) = 4$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(1) = 12 \quad f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(1) = 24 \quad f^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow f^{(4)}(1) = 24$$

$$\text{Άρα από την (1) έχουμε: } f(x) = 1 + \frac{4}{1!}(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4$$

Θέμα 4^ο (οικονομικές συναρτήσεις) (α) Έστω μονοπώλιο με συνάρτηση ζήτησης P η οποία δίνεται από τον τύπο $P(Q) = a - bQ$, $a \in (0, +\infty)$, $b \in (0, +\infty)$. Το συνολικό κόστος δίνεται από τη συνάρτηση C με τύπο $C(Q) = Q^2 + 1$. Να βρεθεί η ποσότητα του προϊόντος η οποία μεγιστοποιεί το κέρδος του μονοπωλίου. (β) Το συνολικό κόστος παραγωγής μιας επιχείρησης δίνεται από τη συνάρτηση C με τύπο $C(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 111Q + 50$. Η συνάρτηση ζήτησης είναι η $Q = 100 - P$. Να γραφτεί το κέρδος της επιχείρησης ως συνάρτηση της ποσότητας Q. Ποιό είναι το μέγιστο κέρδος;

Απάντηση: α) $TR(Q) = P \cdot Q = (a - bQ)Q = aQ - bQ^2$

Συνθήκη μεγιστοποίησης κερδών του μονοπωλίου $MR = MC$

$$MR = MC \Rightarrow (aQ - bQ^2)' = (Q^2 + 1)' \Rightarrow a - 2bQ = 2Q \Rightarrow Q = \frac{a}{2+2b}$$

$$\beta) TR(Q) = P \cdot Q = (100 - Q)Q = 100Q - Q^2$$

$$\text{Κέρδος} = TR - TC = 100Q - Q^2 - \left(\frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 111Q + 50 \right) = -\frac{1}{3}Q^3 + 6Q^2 - Q - 50$$

Μεγιστοποίηση Κέρδους:

ΚΙΠΠ :

$$(\text{κέρδος})' = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}Q^3 + 6Q^2 - Q - 50 \right)' = 0 \Rightarrow -Q^2 + 12Q - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_1 = 11,9 \quad \text{και} \quad Q_2 = 0,085$$

$$\underline{\text{ΚΛΠ}} (\text{κέρδος})'' = (-Q^2 + 12Q - 1)' = -2Q + 12$$

Στα κρίσιμα σημεία έχουμε

$$(\text{κέρδος})''(11,9) = -2 \cdot 11,9 + 12 = -11,8 < 0 \quad \text{άρα μέγιστο}$$

$$(\text{κέρδος})''(0,085) = -2 \cdot 0,085 + 12 = 11,8 > 0 \quad \text{άρα ελάχιστο}$$

Άρα το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται για $Q=11,9$ και είναι $-\frac{1}{3} \cdot 11,9^3 + 6 \cdot 11,9^2 - 11,9 - 50 = 226,04$

Θέμα 5^ο (διαφορικά) Με τη χρήση διαφορικών να υπολογιστεί ο αριθμός $\sqrt[3]{26}$. Με τη χρήση διαφορικών να υπολογιστεί ο αριθμός $\ln(1,01)$.

Απάντηση:

α) Έστω $f(x) = \sqrt[3]{x}$, γνωρίζουμε τη $\sqrt[3]{27} = 3$ άρα $x_0=27$, $dx=-1$. Άρα $\sqrt[3]{26} = f(26) \approx f(27) + f'(27)(-1)$, όπου

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \text{ επομένως, } \sqrt[3]{26} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3} 27^{-2/3} (-1) = 3 - \frac{1}{3} (27^{1/3})^{-2} = 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^{-2} = 3 - \frac{1}{27} = \frac{80}{27} = 2.9629$$

(Ακριβώς, $\sqrt[3]{26} = 2.9624 \dots$)

β) $f(x) = \ln x$, $x_0=1$, $dx=0.01$.

$$\text{Άρα } \ln 1.01 = f(1.01) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0.01 = \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0.01 = 0.01$$

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΙΔΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΝΕΑ POST, ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ [FACEBOOK](https://www.facebook.com/didaskaleio.foititiko)