

Άσκηση1 (2016 Ιαν.)

α) Όταν η τιμή του εισιτηρίου για ένα κονσέρτο στην όπερα στοίχιζε 50 μονάδες η προσέλευση ήταν κατά μέσο όρο 4000 ακροατές σε κάθε παράσταση. Όταν η τιμή του εισιτηρίου ανέβαινε στα 52 η προσέλευση έπεφτε στους 3800 ακροατές. Ποια θα έπρεπε να είναι η τιμή του εισιτηρίου ώστε να μεγιστοποιηθούν τα έσοδα της όπερας. (Υποθέστε γραμμική καμπύλη ζήτησης).

β) Να υπολογιστεί σειρά Taylor με κέντρο 0 της συνάρτησης $\ln(1+x)$ καθώς και η περιοχή σύγκλισης της.

γ) Με την βοήθεια του σκέλους β) να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση $\ln \frac{1+x}{1-x}$

Απάντηση:α)

$$Q = a + bp, \quad b < 0.$$

$$\left. \begin{aligned} Q = 4000, P = 50 &\Rightarrow a + 50b = 4000 \\ Q = 3800, P = 52 &\Rightarrow a + 52b = 3800 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2b = -200 \Rightarrow b = -100$$

$$a + 50(-100) = 4000 \Rightarrow a = 4000 + 5000 = 9000$$

άρα $Q = 9000 - 100p$ η συνάρτηση ζήτησης των εισιτηρίων.

Η συνάρτηση εσόδων είναι $R(p) = pQ = p(9000 - 100p) = 9000p - 100p^2$

$$R'(p) = 9000 - 200p = 0 \Rightarrow 9000 = 200p \Rightarrow p = 9000 / 200 = 45$$

$R''(p) = -200 < 0$ άρα η τιμή του εισιτηρίου που μεγιστοποιεί τα έσοδα είναι $p = 45$ €.

β) $f(x) = \ln(1+x)$ όπου $f(0) = \ln(1) = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -6 \text{ κ.ο.κ. άρα}$$

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} + \dots \Rightarrow$$

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{6x^4}{4!} + \dots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\text{άρα } p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ και } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}} = (-1)^1 \frac{nx^{n+1}}{(n+1)x^n} = -\frac{n}{(n+1)} x$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|$ και για να συγκλίνει η σειρά πρέπει $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| < 1$ άρα $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ η περιοχή σύγκλισης.

γ)

$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ όπου από το σκέλος β) έχουμε ότι η $\ln(1+x)$ αναπτύσσεται στη δυναμοσειρά

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \text{ και άρα η } \ln(1-x) \text{ στη δυναμοσειρά}$$

$$h(x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + \dots = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{x^n}{n} \text{ επομένως}$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots - (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots) = \\ &= 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Άσκηση2: α) Με χρήση διαφορικού να προσεγγιστεί το $\sqrt[1]{1.1}$

β) Η ζήτηση q συνδέεται με την τιμή p με την συνάρτηση $p = -q^2 - 3q + 100$. Να υπολογίσετε την ελαστικότητα της ζήτησης όταν η τιμή p=90.

γ) Αν $y(x) = xe^{y(x)}$, βρείτε την $y''(0)$

Απάντηση:

$$\alpha) f(x) = \sqrt[n]{n}, f(1) = \sqrt[1]{1} = 1, dx=0.1 \text{ και } f'(x) = (n^{1/n})' = \left(e^{\frac{1}{n} \ln n} \right)' = e^{\frac{1}{n} \ln n} \left(\frac{1}{n} \ln n \right)' = e^{\frac{1}{n} \ln n} \left(-\frac{1}{n^2} \ln n + \frac{1}{n^2} \right) \text{ και}$$

$$f'(1) = e^0 \left(-\frac{1}{1^2} \ln 1 + \frac{1}{1^2} \right) = 1 \text{ άρα } \sqrt[1]{1.1} = f(1.1) \approx f(1) + f'(1)dx = 1 + 1 \cdot 0.1 = 1.1.$$

β)

$$\varepsilon = \frac{dq}{dp} \frac{p}{q}. \text{ Για } p=90, \quad 90 = -q^2 - 3q + 100 \Rightarrow q^2 + 3q - 10 = 0, \quad \Delta=49, \quad q = \frac{-3 \pm 7}{2} = 2 (q>0). \quad \text{Και}$$

$$(p)' = (-q^2 - 3q + 100)' \Rightarrow 1 = -2qq' - 3q' \Rightarrow q'(-2q - 3) = 1 \Rightarrow q' = \frac{1}{(-2q - 3)}, \text{ άρα}$$

$$\varepsilon = \frac{dq}{dp} \frac{p}{q} = \frac{1}{(-2q - 3)} \frac{p}{q} = \frac{1}{(-2 \cdot 2 - 3)} \frac{90}{2} = -6.43$$

γ) Από τη πεπλεγμένη σχέση για $x=0$, $y(0) = 0$. Παραγωγίζουμε:

$$y' = e^y + xe^y y' \Rightarrow y'(1 - xe^y) = e^y \Rightarrow y' = \frac{e^y}{1 - xe^y} \text{ για } x=0, y'(0) = \frac{e^{y(0)}}{1 - 0} = 1 \text{ και παραγωγίζουμε 2}^{\text{η}} \text{ φορά}$$

$$\text{πεπλεγμένα, } y' = e^y + xe^y y' \Rightarrow y'' = e^y y' + ((xe^y)' y' + xe^y y'') = 0 \Rightarrow$$

$$y'' = e^y y' + [(e^y + xe^y y') y' + xe^y y''] \text{ και } y''(0) = 1 + [(1+0)1 + 0] = 2.$$

Άσκηση 3 : α) Να δείξετε ότι τα έσοδα μεγιστοποιούνται στο σημείο μοναδιαίας ελαστικότητας

β) Αποδείξτε το τύπο για την ελαστικότητα γινομένου

γ) Υπολογίστε την ελαστικότητα της $g(x) = e^x e^{2x} e^{3x} \dots e^{100x}$

Απάντηση: α)

$$TR = p \cdot q(p) \Rightarrow$$

$$MR = \frac{dTR}{dp} = (p)'q(p) + pq'(p) = q + p \frac{dq}{dp} = q + \frac{q}{p} p \frac{dq}{dp} = q \left(1 + \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} \right) = q(1 + \varepsilon_d)$$

β) Εάν $y = fg$ τότε $\varepsilon_y = \varepsilon_f + \varepsilon_g$

Απόδειξη

$$\varepsilon_y = \frac{dy}{dx} \frac{x}{y} = \frac{d(fg)}{dx} \frac{x}{fg} = (f'g + fg') \frac{x}{fg} = \frac{f'x}{f} + \frac{g'x}{g} = \varepsilon_f + \varepsilon_g$$

γ) Καθώς $g(x) = e^x e^{2x} e^{3x} \dots e^{100x} = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_{100}(x)$ με βάση το τύπο για την ελαστικότητα γινομένου έχουμε $\varepsilon_g = \varepsilon_{f_1} + \varepsilon_{f_2} + \dots + \varepsilon_{f_{100}}$ όπου

$$\varepsilon_{f_1} = \frac{df_1}{dx} \frac{x}{f_1} = e^x \frac{x}{e^x} = x, \quad \varepsilon_{f_2} = \frac{df_2}{dx} \frac{x}{f_2} = 2e^{2x} \frac{x}{e^{2x}} = 2x \quad \dots \quad \varepsilon_{f_{100}} = \frac{df_{100}}{dx} \frac{x}{f_{100}} = 100e^{100x} \frac{x}{e^{100x}} = 100x$$

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{f_1} + \varepsilon_{f_2} + \dots + \varepsilon_{f_{100}} = x + 2x + 3x + \dots + 100x = x(1 + 2 + 3 + \dots + 100) = x \frac{(1+100)100}{2} = 5050x$$

Άσκηση 4 : Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$i) \int x^3 \cdot (\ln x)^2 dx \quad ii) \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx \quad iii) I = \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^2 - x} dx$$

Απάντηση : i) Πολυνώνιο επί $\ln \rightarrow$ παραγοντική με την παράγουσα στο πολυνώνιο

$$\begin{aligned} \int x^3 \cdot (\ln x)^2 dx &= \int \left(\frac{x^4}{4} \right)' \cdot (\ln x)^2 dx \xrightarrow{\text{παραγοντική}} \frac{x^4}{4} \cdot (\ln x)^2 - \int \frac{x^4}{4} \cdot 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{1}{4} x^4 (\ln x)^2 - \frac{2}{4} \int x^3 \cdot (\ln x) dx = \frac{1}{4} x^4 (\ln x)^2 - \frac{2}{4} \int \left(\frac{x^4}{4} \right)' \cdot (\ln x) dx \xrightarrow{\text{παραγοντική}} \\ &= \frac{1}{4} x^4 (\ln x)^2 - \frac{2}{16} x^4 (\ln x) + \frac{2}{4} \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} x^4 (\ln x)^2 - \frac{2}{16} x^4 (\ln x) + \frac{2}{64} x^4 \end{aligned}$$

ii) Μέθοδος αντικατάστασης καθώς η παράγωγος του εκθέτη θα απλοποιήσει το ολοκλήρωμα

$$\text{Θέτω } u = -x^2 \text{ τότε } du = -2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x} \text{ και τα όρια:}$$

$$\text{όταν } x \rightarrow -\infty \Rightarrow u \xrightarrow{u=-x^2} -\infty \text{ και } x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \xrightarrow{u=-x^2} -\infty \text{ άρα,}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{-\infty} e^u \frac{du}{-2} = 0$$

iii) Για το ρητό αυτό ολοκλήρωμα αρχικά κάνουμε πολυωνυμική διαίρεση καθώς ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από αυτόν του παρανομαστή.

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 - x - 1 \\ \underline{x^4 - x^3} \\ -x - 1 \end{array}$$

$$\text{άρα } \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^2 - x} = \frac{x^2(x^2 - x) - x - 1}{x^2 - x} = x^2 + \frac{-x - 1}{x^2 - x} = x^2 + \frac{-x - 1}{x(x - 1)}$$

και ψάχνουμε σταθερές A και B ώστε

$$\frac{-x - 1}{x(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} \Rightarrow -x - 1 = A(x - 1) + Bx$$

Βρίσκουμε για $x=1$, $B=-2$ και για $x=0$, $A=1$, άρα,

$$I = \int x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-2}{x-1} dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x| - 2\ln|x-1| + c$$

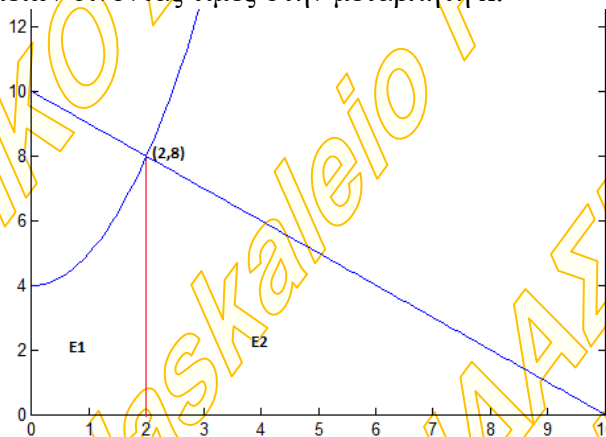
Άσκηση5: Βρείτε το εμβαδό που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2 + 4$, $y = 10 - x$, και τον άξονα $y'y$.

Απάντηση: Κατασκευάζουμε ένα γράφημα

Για να αναπαραστήσουμε την ευθεία $y = 10 - x$ αρκεί να βρούμε 2 σημεία της.

Για να αναπαραστήσουμε την καμπύλη $y = x^2 + 4$ έχουμε 2 τρόπους:

- 1) Παριστά την παραβολή $y = x^2$ μετατοπισμένη κατά 4 προς τα πάνω.
- 2) Φτιάχνουμε ένα πλέγμα σημείων δίνοντας τιμές στην μεταβλητή x .



Σημείο τομής :

$x^2 + 4 = 10 - x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$ βρίσκουμε 2 ρίζες $x=2$ και $x=-3$, για $x=2$ έχουμε $y=8$ άρα τομή $(2,8)$.

Υπολογισμός εμβαδού E:

Το ζητούμενο εμβαδό επιμερίζεται σε 2 μέρη $E = E_1 + E_2$ όπου

$$E_1 = \int_0^2 (x^2 + 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 8 - 0$$

$$E_2 = \int_2^{10} (10 - x) dx = \left[10x - \frac{x^2}{2} \right]_2^{10} = 100 - 50 - 20 + 12 = 32$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $E = 40 + \frac{8}{3}$

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΙΔΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΝΕΑ POST, ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ [FACEBOOK](https://www.facebook.com/didaskaleio.foititiko)