Άσκηση 1 (Πεπλεγμένη παραγώγιση) Αν $(\eta\mu y)^{\eta\mu x}=x$ να βρεθεί η $y'=\dfrac{dy}{dx}$

Λύση: (εκθετικός μετασχηματισμός $f^{g}=e^{g\cdot\ln f}$) άρα,

$$(\eta\mu y)^{\eta\mu x}=x\to e^{\eta\mu x\cdot\ln(\eta\mu y)}=x\xrightarrow{\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\zeta o\upsilon\mu\varepsilon}$$

$$e^{\eta\mu x\cdot\ln(\eta\mu y)}\cdot\left[\eta\mu x\cdot\ln(\eta\mu y)\right]'=1\to e^{\eta\mu x\cdot\ln(\eta\mu y)}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(\eta\mu y)+\eta\mu x\cdot\frac{1}{\eta\mu y}\sigma\upsilon\nu y\cdot y'\right]=1\to$$

$$\to e^{\eta\mu x\cdot\ln(\eta\mu y)}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(\eta\mu y)+e^{\eta\mu x\cdot\ln(\eta\mu y)}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{1}{\eta\mu y}\sigma\upsilon\nu y\cdot y'=1\xrightarrow{e^{\eta\mu x\cdot\ln(\eta\mu y)}=(\eta\mu y)^{\eta\mu x}}$$

$$\to(\eta\mu y)^{\eta\mu x}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{1}{\eta\mu y}\sigma\upsilon\nu y\cdot y'=1-(\eta\mu y)^{\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(\eta\mu y)\to$$

$$\to y'=\frac{1-(\eta\mu y)^{\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(\eta\mu y)}{(\eta\mu y)^{\eta\mu x}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{1}{\eta\mu y}\sigma\upsilon\nu y}$$

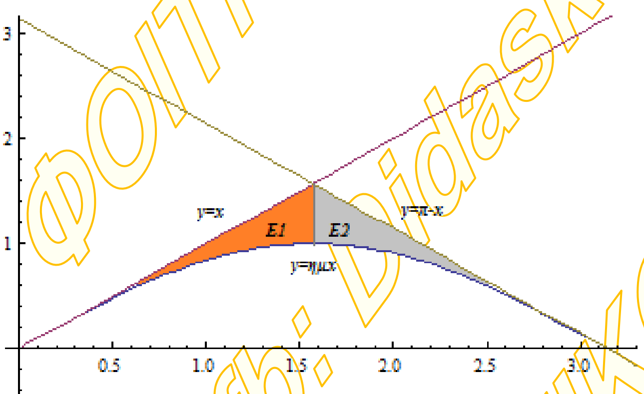
Άσκηση 2 Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της ημ x και των εφαπτομένων της στα σημεία (0,0) και (π,0).

Λύση:

Εξίσωση εφαπτομένης $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0),\ f'(x)=\sigma\upsilon\nu(x)$

Εξίσωση εφαπτομένης στο (0,0) : y-0=συν(0) (x-0) => <u>y=x</u>

Εξίσωση εφαπτομένης στο (π,0) : y-0=συν(π) (x-π) => <u>y=π-x</u>



Σημείο τομής x=π-x => x= π/2

$$E=E_1+E_2=\int_0^{\pi/2}x-\eta\mu(x)dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\pi-x-\eta\mu(x)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/2}+\left[\pi x-\frac{x^2}{2}+\sigma\upsilon\nu x\right]_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$\left(\frac{\pi^2}{8}+0-0-1\right)+\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{2}-1-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{8}-0\right)=\frac{\pi^2-8}{4}$$

Άσκηση 3 . Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty}x\cdot e^{-2x}dx$

a) $\displaystyle\int_0^{\infty}x\cdot e^{-2x}dx=\int_0^{\infty}x\cdot\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'dx=-\frac{1}{2}\left[x\cdot e^{-2x}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}x\cdot e^{-2x}-0\cdot e^{0}\right)-\frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^{\infty}$

$$=-\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}x\cdot e^{-2x}-0\cdot e^{0}\right)-\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to\infty}e^{-2x}-e^{0}\right)=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Ισχύει $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\cdot e^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}\xrightarrow{DLH}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}\to\frac{1}{\infty}=0$

Άσκηση 4 (Ιούλιος12/Μελάς/θ5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int\left(\frac{x}{(x-2)(x^2+2)}-\tau o\xi\varepsilon\varphi(x)\right)dx$$

Λύση:

$$\int\left(\frac{x}{(x-2)(x^2+2)}-\tau o\xi\varepsilon\varphi(x)\right)dx=\underbrace{\int\frac{x}{(x-2)(x^2+2)}dx}_{I_1\ \rho\eta\tau\acute{o}}-\underbrace{\int \tau o\xi\varepsilon\varphi(x)dx}_{I_2}$$

Για το I_1:

Αναζητούμε σταθερές Α,Β,Γ ώστε $\frac{x}{(x-2)(x^2+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+2}$

Προκύπτει Α=1/3, Β=-1/3, Γ=1/3. Άρα

$$I_1=\int\frac{x}{(x-2)(x^2+2)}dx=\int\frac{1/3}{x-2}dx+\int\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+2}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{2\cdot 3}\int\frac{2x}{x^2+2}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}^2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)+\frac{1}{3\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

και $I_2=\int\tau o\xi\varepsilon\varphi(x)dx=\int(x)'\tau o\xi\varepsilon\varphi(x)dx=$

$$=x\tau o\xi\varepsilon\varphi(x)-\int\frac{x}{x^2+1}dx=x\tau o\xi\varepsilon\varphi(x)-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=x\tau o\xi\varepsilon\varphi(x)-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|$$

άρα

$$\int\left(\frac{x}{(x-2)(x^2+2)}-\tau o\xi\varepsilon\varphi(x)\right)dx=\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)+\frac{1}{3\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\frac{x}{\sqrt{2}})-x\tau o\xi\varepsilon\varphi(x)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Άσκηση 5 *Να δείξετε ότι* $A\cap(A^c\cup B)=A\cap B$

Λύση Έστω $x\in A\cap(A^c\cup B)$ τότε $x\in A$ και $x\in(A^c\cup B)$

$x\in A$ και $\{x\notin A$ ή $x\in B\}$ άρα

$x\in A$ και $x\in B$

$x\in A\cap B$

Αντίστροφα, αν $x\in A\cap B$ τότε $x\in A$ και $x\in B$

$x\in A$ και $x\in(A^c\cup B)$ άρα

$x\in A\cap(A^c\cup B)$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις εγκλεισμού προκύπτει το ζητούμενο.