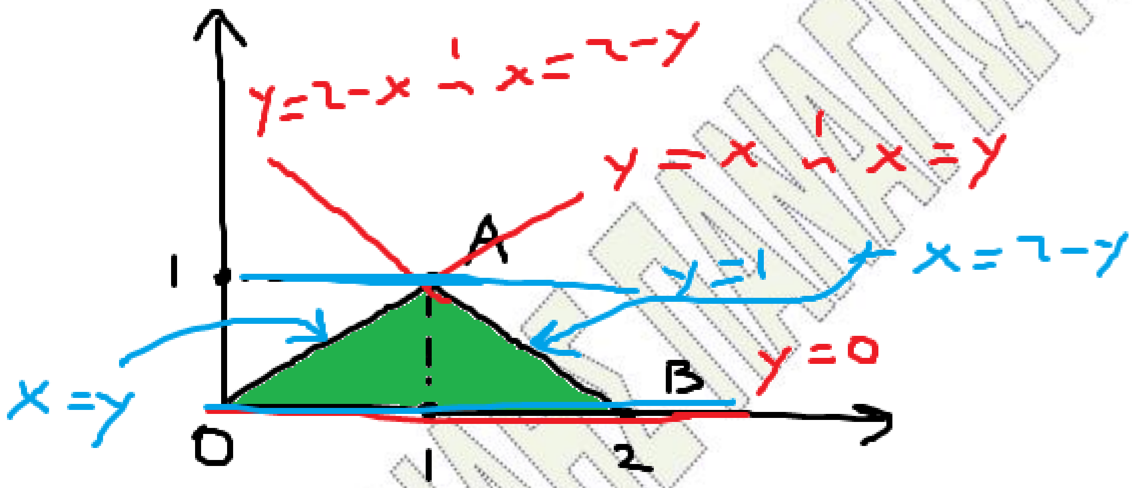
1.Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\iint_R (y^2 - x + 1)\, dxdy$$

όπου R είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία O(0, 0), A(1, 1) και B(2, 0).

Απάντηση :



ως προς y

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=2-y}(y^2-x+1)\,dx\,dy=$$

$$\int_{y=0}^{y=1}\left[y^2x-\frac{x^2}{2}+x\right]_{x=y}^{x=2-y}dy=$$

$$=\int_{y=0}^{y=1} y^2(2-y)-\frac{(2-y)^2}{2}+2-y-\left(y^3-\frac{y^2}{2}+y\right)dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} 2y^2 - y^3 - \frac{4-4y+y^2}{2} + 2 - y - y^3 + \frac{y^2}{2} - y \, dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} -2y^3 + 2y^2 \, dy = -2\frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{3}\Big]_0^1 = -\frac{2}{4} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

2.Να βρείτε ένα τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f(x, y) = $2x^3 + 2y^3 - 5y^2 - 5x^2 + 1$ χρησιμοποιώντας τις συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης.

Απάντηση :

f.o.c. $f_x = 0 \rightarrow 6x^2 - 10x = 0 \rightarrow 2x(3x-5) = 0$ ①

$f_y = 0 \rightarrow 6y^2 - 10y = 0 \rightarrow 2y(3y-5) = 0$ ②

① $x = 0$ ή $x = 5/3$

② $y = 0$ ή $y = 5/3$

Κρισιμα $A(0,0)$, $B(0, 5/3)$, $\Gamma(\frac{5}{3}, 0)$, $\Delta(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$

s.o.c. $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x-10 & 0 \\ 0 & 12y-10 \end{bmatrix}$

$\Sigma_{\tau o}$ $A(0,0)$ $H_A = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$ $f_{xx} = -10 < 0$

$|H_A| = 100 > 0$

άρα στο σημείο A (0,0) έχουμε τοπικό μέγιστο

$$\Sigma \tau o \ B(0, 5/3) \quad H_B = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f_{xx} = -10 < 0 \\ |H_B| = -100 < 0 \end{matrix}$$

άρα στο σημείο B (0, 5/3) είναι σαγματικό σημείο

$$\Sigma \tau o \ \Gamma\left(\frac{5}{3}, 0\right) \quad H_\Gamma = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f_{xx} = 10 > 0 \\ |H_\Gamma| = -100 < 0 \end{matrix}$$

άρα στο σημείο Γ (5/3 , 0) είναι σαγματικό σημείο

$$\Sigma \tau o \ \Delta\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) \quad H_\Delta = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f_{xx} = 10 > 0 \\ |H_\Delta| = 100 > 0 \end{matrix}$$

άρα στο σημείο Δ (5/3 , 5/3) έχουμε τοπικό ελάχιστο

3.Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση f(x, y, z) $=2x^2 + 3y^2 + z^2$, υπό τον περιορισμό $x + y + z = 4$

Απάντηση :

$$L = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 4)$$

foc

$$L_x = 0 \rightarrow 4x - \lambda = 0 \rightarrow x = \lambda/4 \quad (1)$$

$$L_y = 0 \rightarrow 6y - \lambda = 0 \rightarrow y = \lambda/6 \quad (2)$$

$$L_z = 0 \rightarrow 2z - \lambda = 0 \rightarrow z = \lambda/2 \quad (3)$$

$$L_\lambda = 0 \longrightarrow x + y + z = 4 \quad (4)$$

$$(4) \xrightarrow{1,2,3} \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda}{2} = 4 \rightarrow \frac{11}{12}\lambda = 4$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{48}{11}$$

$$(1) \rightarrow x = \frac{48}{44}$$

$$(2) \rightarrow y = \frac{48}{66}$$

$$(3) \rightarrow z = \frac{48}{22}$$

Κρίσιμο $A\left(\frac{48}{44}, \frac{48}{66}, \frac{48}{22}\right)$

4. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστεί η δύναμη A^n.

Απάντηση :

Ιδιοτιμές

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda)^2 - 0 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{ιδιοτιμή } \lambda = 1$$

ο πινακας δεν διαγωνοποιείται

$$A^2 = A \cdot A = \underset{(2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Έστω } A^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να το αποδείξουμε θα χρησιμοποιησουμε την μέθοδο της επαγωγής

Πρέπει να ισχύει για n=1 , 2, 3

Υποθέτουμε ότι ισχύει για n=k και αποδεικνύουμε ότι ισχύει για n=k+1

$$\text{Έστω } A^k = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Θ.ν.δ.ο. } A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πράγματι $A^{k+1} = A \cdot A^{k} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -k-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο.ε.δ

5. Έστω η συνάρτηση τριών μεταβλητών $f(x,y,z) = \ln(z(y^2+x^2))$. Να αποδειχθεί οτι ισχύει η ταυτότητα.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - z\frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

Απάντηση :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z(y^2+x^2)} \cdot 2xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{z(y^2+x^2)} \cdot 2yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z(y^2+x^2)} (y^2+x^2)$$

$$\frac{2x^2\cancel{z}}{\cancel{z}(y^2+x^2)} + \frac{2y^2\cancel{z}}{\cancel{z}(y^2+x^2)} - \overset{1}{\cancel{\frac{z(y^2+x^2)}{z(y^2+x^2)}}} =$$

$$\frac{2\cancel{(y^2+x^2)}}{\cancel{y^2+x^2}} - 1 = 1$$

6. Να λυθεί το παραμετρικό γραμμικό σύστημα

$$x + y = \lambda + 1$$
$$x + \lambda . y = 2$$

Απάντηση :

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 \\ 1 & \lambda & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 - r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & \boxed{\lambda-1} & 1-\lambda \end{array}\right]$$

• Αν $\lambda = 1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $rankA = 1 = rankA|b < n = 2$

άπειρες λύσεις

$$x + y = 2 \rightarrow x = 2 - y$$

$$(x, y) = (2-y, y) \quad y \in \mathbb{R}$$

• $\lambda \neq 1$ $rankA = 2 = rank(A|b) = 2$

Μοναδική λύση

$$(\lambda-1)y = 1-\lambda \rightarrow y = -1$$

$$x + y = \lambda + 1 \xrightarrow{y=-1} x = \lambda + 2$$

$$(x, y) = (\lambda + 2, -1)$$

7. Να υπολογιστεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που να παρεμβάλει τα σημεία (0,0), (1,1),(-1,-1),(4,5).

Απάντηση :

$$f(a,b) = a^2 + (a+b-1)^2 + (a-b+1)^2 + (a+4b-5)^2$$

$$f_a = 0 \rightarrow 2a + 2(a+b-1) + 2(a-b+1) + 2(a+4b-5) = 0$$

$$\rightarrow 8a + 8b = 10 \quad ①$$

$$f_b = 0 \rightarrow 2(a+b-1) + 2(a-b+1)(-1) + 2(a+4b-5)\cdot 4 = 0$$

$$\rightarrow 8a + 36b = 44 \quad ②$$

$$② - ① \rightarrow 28b = 34 \rightarrow b = \frac{34}{28} = 1{,}214$$

$$① \rightarrow a = 0{,}0357$$

άρα $\hat{Y}_i = 0{,}0357 + 1{,}214 \cdot X_i$