

Μαθηματικά Π**Θέμα 5 Εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2013 (εμβόλιμη: Ιανουάριος 2014)****Ακρότατα υπό περιορισμούς – Μέθοδος Lagrange**

Εκφώνηση: Βρείτε τα ακρότατα της $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2$ υπό τον περιορισμό $x + y + z = 1$.

Απάντηση: Ορίζουμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y + z^2 - \lambda(x + y + z - 1)$$

Συνθήκες 1^{ης} τάξης:

$$L_x = 2x - \lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda / 2 \Rightarrow x = -1/2$$

$$L_y = -1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$L_z = 2z - \lambda = 0 \Rightarrow z = \lambda / 2 \Rightarrow z = -1/2$$

$$L_\lambda = 0 \Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - x - z \Rightarrow y = 2$$

Κρίσιμο σημείο $(x, y, z, \lambda) = (-1/2, 2, -1/2, -1)$

Συνθήκες 2^{ης} τάξης:

Πλαισιωμένος Εσσιανός $H = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_z & L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$D_4 = |H| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \quad \text{και} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0 \quad \text{άρα ελάχιστο της } f \text{ στο}$$

σημείο $(x, y, z, \lambda) = (-1/2, 2, -1/2, -1)$.

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΝΗΜΕΡΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ FACEBOOK.