

Ιανουάριος 13 – Μελάς

ΘΕΜΑ 1 (2 μονάδες)

Επιλύστε με μεθόδους γραμμικής άλγεβρας (μέθοδο οριζουσών, μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan, μέθοδο απαλοιφής Gauss) για τις διάφορες τιμές του a το ακόλουθο γραμμικό σύστημα. $A \cdot X = b$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$$

Λύση

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - a\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1+a-a^2-a^3 \end{bmatrix}$$

α)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1+a-a^2-a^3 \end{bmatrix}$$

- Εάν $2-a-a^2=0$ ($\Delta=9$, $\alpha_1=-2$, $\alpha_2=1$) τότε
 - Για $\alpha=-2$, $1+a-a^2-a^3=3$ δηλαδή το σύστημα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ rank } A = 2 \neq \text{rank}[A|b] = 3 \text{ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.}$$

- Για $\alpha=1$, $1+a-a^2-a^3=0$ δηλαδή το σύστημα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ rank } A = 1 = \text{rank}[A|b] = \text{άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις}$$

$$x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z$$

και η γενική μορφή των λύσεων είναι

$$(x, y, z) = (1-y-z, y, z) = (1, 0, 0) + y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \text{ με ελεύθερες παραμέτρους τα } y, z.$$

Ο χώρος των λύσεων δεν αποτελεί διανυσματικό χώρο γιατί μεταξύ άλλων δε περιέχει το $(0,0,0)$ λόγω του σταθερού προσθετέου. Γεωμετρικά ο χώρος των λύσεων αποτελεί επίπεδο που διέρχεται από το $(1,0,0)$ και τα σημεία $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$.

- Εάν $2-a-a^2 \neq 0$, δηλαδή για $a \neq -2, 1$, το σύστημα έχει μοναδική λύση. Με προς τα πίσω αντικατάσταση

$$\text{έχουμε, } z = \frac{1+a-a^2-a^3}{2-a-a^2}$$

$$(a-1)y + (1-a)z = a - a^2 \Rightarrow y - z = -a \Rightarrow y = -a + \frac{1+a-a^2-a^3}{2-a-a^2}$$

$$x + y + az = a^2 \Rightarrow x = a^2 - \left(-a + \frac{1+a-a^2-a^3}{2-a-a^2} \right) - a \frac{1+a-a^2-a^3}{2-a-a^2}$$

Ο χώρος των λύσεων αποτελείται από ένα μόνο σημείο του $\mathbb{R}^3$ και δεν αποτελεί διανυσματικό χώρο (αφού η λύση είναι διάφορή του μηδενός).

ΘΕΜΑ 2 (2 μονάδες)

$$\text{Δίνεται ο πίνακας } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

α) Είναι προφανές (δηλαδή χωρίς να κάνετε υπολογισμό) ότι διαγωνοποιείται ο A και γιατί?

β) Να βρείτε τις ιδιοτιμές του A και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους τους.

γ) Βρείτε τη διάσταση και μία βάση του ιδιοχώρου σε κάθε περίπτωση. Τι αντιπροσωπεύουν οι ιδιοχώροι γεωμετρικά?

δ) Διαγωνοποιήστε τον A και επαληθεύστε τη σχέση διαγωνοποίησης.

ε) Υπολογίστε τον A^{33} .

Λύση

Ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, (τριγωνικός, τα διαγώνια στοιχεία είναι οι ιδιοτιμές), διακριτές άρα διαγωνοποιείται.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, επιλύουμε το σύστημα

$$(A - I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 0$$

Άρα ο ιδιοχώρος για $\lambda_1 = 1$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων $(x_1, x_2) = (x_1, 0) = x_1(1, 0)$, $x_1 \in \mathbb{R}$ και το ιδιοδιάνυσμα είναι το $u_1 = (1, 0)^T$.

Βάση του ιδιοχώρου $\{u_1 = (1, 0)^T\}$, διάσταση 1, ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων στη διεύθυνση του $(1, 0)$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 0$, επιλύουμε το σύστημα

$$(A - 0I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

Άρα ο ιδιοχώρος για $\lambda_2 = 0$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων $(x_1, x_2) = (-x_2, x_2) = x_2(-1, 1)$, $x_2 \in \mathbb{R}$ και το ιδιοδιάνυσμα είναι το $u_2 = (-1, 1)^T$.

Βάση του ιδιοχώρου $\{u_2 = (-1, 1)^T\}$, διάσταση 1, ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων στη διεύθυνση του $(-1, 1)$.

Διαγωνοποίηση

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επαλήθευση

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$A^{33} = PD^{33}P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1^{33} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = A$$

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες)

Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x+y$ πάνω στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$. Ερμηνεύστε γεωμετρικά.

Λύση

$$L = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\left. \begin{aligned} L_x = 1 - 2\lambda x = 0 &\Rightarrow 1 = 2\lambda x \\ L_y = 1 - 2\lambda y = 0 &\Rightarrow 1 = 2\lambda y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1/2 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$$

$$y = \pm 1/\sqrt{2}, \quad \lambda = \pm 1/2x = \pm \sqrt{2}/2$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{bmatrix}$$

$$(x, y, \lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 2/\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \det H = |H| = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} > 0 \text{ άρα μέγιστο}$$

$$(x, y, \lambda) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -2/\sqrt{2} & -2/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -2/\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \det H = |H| = -\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} < 0 \text{ άρα ελάχιστο}$$

και $\det H = |H| = -48 < 0$ και στις δύο περιπτώσεις.

Γεωμετρικά : τομή της συνάρτησης (επίπεδο) με το κύκλο, τα κρίσιμα σημεία είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου όπου η συνάρτηση μεγιστοποιείται και ελαχιστοποιείται.

ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες)

Η τιμή p και η ποσότητα ζήτησης q ενός προϊόντος δίνεται από τον πίνακα

p	q
5	4
6	3
7	1

Βρείτε την ευθεία της απλής γραμμικής παλινδρόμησης και στην συνέχεια εκτιμήστε την ποσότητα ζήτησης q για $p=6,5$.

Λύση Θα βρούμε την ευθεία (με απόδειξη) $q = 11.67 - 1.5p$

Για $p=6.5$, $q = 11.67 - 1.5 \cdot 6.5 = 1.92$

Ζητούμενη ευθεία : $q = \alpha + \beta \cdot p$

$$\min \left\{ \sum (a + \beta \cdot p - y)^2 \right\}$$

$$F(a, b) = (a + \beta \cdot 5 - 4)^2 + (a + \beta \cdot 6 - 3)^2 + (a + \beta \cdot 7 - 1)^2$$

$$F_a = 0 \rightarrow 2 \cdot (a + \beta \cdot 5 - 4) + 2 \cdot (a + \beta \cdot 6 - 3) + 2 \cdot (a + \beta \cdot 7 - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6a + 36\beta = 16 \quad (1)$$

$$F_b = 0 \rightarrow 2 \cdot 5(a + \beta \cdot 5 - 4) + 2 \cdot 6(a + \beta \cdot 6 - 3) + 2 \cdot 7(a + \beta \cdot 7 - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 36a + 220\beta = 90 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) $a = 11,67$ και $\beta = -1,5$ άρα **$q = 11,67 - 1,5p$**

Για $p = 6,5$, $q = 11,67 - 1,5 \cdot 6,5 = 1,92$

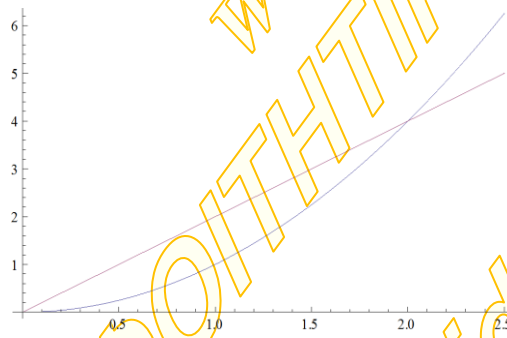
Εσσιανός $H = \begin{bmatrix} F_{aa} & F_{ab} \\ F_{ba} & F_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 36 \\ 36 & 220 \end{bmatrix}$ $F_{aa} = 6 > 0$, $|H| = 24 > 0$ θετικά ορισμένος άρα ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 5 (2 μονάδες)

Να υπολογιστεί το ακόλουθο ολοκλήρωμα $I_1 = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy dx$ αφού πρώτα σχεδιασθεί η περιοχή

ολοκλήρωσης. Στη συνέχεια να γίνει αντιστροφή της σειράς ολοκλήρωσης ως προς τις μεταβλητές x και y και να επαληθευτεί ότι ανεξάρτητα από τη σειρά ολοκλήρωσης προκύπτει η ίδια τιμή του ολοκληρώματος.

Λύση:



$$I_1 = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy dx = \int_0^2 \left[4xy + 2y \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx =$$

$$= \int_0^2 [8x^2 + 4x - 4x^3 - 2x^2] dx = \int_0^2 [6x^2 + 4x - 4x^3] dx = \left[\frac{6x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - x^4 \right]_0^2 = 16 + 8 - 16 = 8$$

Αλλαγή σειράς :

$$I_1 = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2) dx dy = \dots = 8$$

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΙΔΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΝΕΑ POST, ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ [FACEBOOK](https://www.facebook.com/didaskaleiofoititiko)