ΤΟΕ – Στατιστική 1 – 2024 Σεπτέμβριος - Νικολέρης

Εξετάσεις: Σεπτεμβρίου 2024 Μάθημα: Στατιστική Ι

ΘΕΜΑ 1°

(α) __(Βαθμοί 2).__ Προμηθευτής ηλεκτρικών συσκευών τις αγοράζει σε φορτία που κάθε ένα περιέχει 10 συσκευές. Επιλέγει τυχαία ένα φορτίο το οποίο ελέγχει επιλέγοντας στη τύχη 3 συσκευές και αποδέχεται την παραλαβή εαν και μόνον εαν και οι 3 συσκευές δεν είναι ελαττωματικές. Εαν από τα φορτία το 30% περιέχουν τέσσερις(4) ελαττωματικές και το 70% μόνο μία(1) υπολογίστε την πιθανότητα να απορρίψει την παραλαβή.

Αν το φορτίο είναι 1ου τύπου με 4 στα 10 ελλατωματικά

$\boxed{\begin{matrix} 4\ E \\ 6\ K \end{matrix}} \xrightarrow{\text{χωρις επαναθεση}} 3$

$$P(\text{αποδοχης}) = P(E=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1 \cdot 20}{120} = 0{,}167$$

$$\text{αρα } P(\text{απορριψης}) = 1 - 0{,}167 = 0{,}833$$

Αν το φορτίο είναι 2ου τύπου με 1 στα 10 ελλατωματικά

$\boxed{\begin{matrix} 1\ E \\ 9\ K \end{matrix}} \xrightarrow{\text{Χ.Ε.}} 3$

$$P(\text{αποδοχης}) = P(E=0) = \frac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1 \cdot 84}{120} = 0{,}7$$

$$\text{αρα } P(\text{απορριψης}) = 0{,}3$$

Απο θεώρημα Ολικής Πιθανότητας
Καθολικό Ενδεχόμενο Ε : η απόρριψη της παρτίδας
Ενδεχόμενο Α : φορτίο 1ου τύπου
Ενδεχόμενο Β : φορτίο 2ου τύπου

$$P(E) = P(A) \cdot P(E|A) + P(B) \cdot P(E/B)$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}833 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 = \boxed{0{,}46}$$

Η πιθανότητα να απορρίψει την παραλαβή είναι 46%

(β) (Βαθμοί 1,5) .Οι αφίξεις πλοίων , ανά ώρα, στους λιμένες $Λ_1$ και $Λ_2$ περιγράφονται από μία κατανομή Poisson με παραμέτρους $λ_1=1$, $λ_2=2$, αντίστοιχα. (i) Υπολογίστε την πιθανότητα σε μία ώρα, να μην αφιχθεί πλοίο στο $Λ_1$ (ii) αν οι αφίξεις στα δύο λιμάνια είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους ποιά είναι η πιθανότητα σε μία ώρα να συμβεί μία άφιξη στο $Λ_1$ και καμία άφιξη στο $Λ_2$; (iii) Σε ποιό από τα δύο λιμάνια συμβαίνουν οι περισσότερες, κατά μέσο όρο αφίξεις ανά ώρα; Δικαιολογείστε την απάντηση σας.

i) Poisson με λ=1 πλοίο ανά ωρα

$$P(x=0) = \frac{e^{-1}\cdot 1^{0}}{0!} = e^{-1} = \boxed{0,3679} \text{ ή } 36,79\%$$

$$ii)\ P(X_1=1 \cap X_2=0) \overset{\text{ανεξ.}}{=\!=} P(X_1=1)\cdot P(X_2=0) =$$

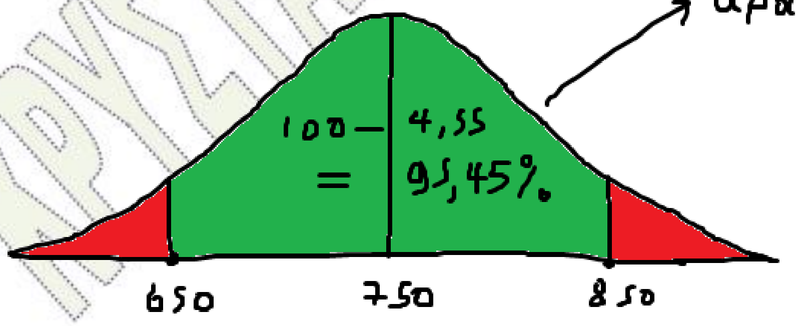
$$= \frac{e^{-1}\cdot 1^{1}}{1!} \cdot \frac{e^{-2}\cdot 2^{0}}{0!} = e^{-1}\cdot e^{-2} = e^{-3} = \boxed{0,0498}$$

iii) Η παράμετρος λ σε μια Poisson ισουται με την μέση τιμή.

Άρα λ1=1 σημαίνει ότι κατα μέσο όρο στο λιμάνι Λ1 φτάνει 1 πλοίο ανα ώρα, ενώ το λ2=2 σημαίνει ότι κατα μέσο όρο στο λιμάνι Λ2 φτάνουν 2 πλοία ανα ώρα, συνεπώς στο Λιμάνι 2 φτάνουν περισσότερα κατα μέσο όρο πλοία ανα ώρα.

(γ) (Βαθμός 1,5). Οι μισθοί σε έναν οργανισμό έχουν συμμετρική κατανομή με $\bar{X} = 750$ ευρώ. (i) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση (σ), αν γνωρίζουμε ότι κάτω από 650 ευρώ και πάνω από 850 ευρώ παίρνει συνολικά το 4,55% των εργαζομένων. (ii) Αν όλοι οι μισθοί μειωθούν κατά 20% και δοθεί όμως και ένα επίδομα 10 ευρώ, να βρεθεί ο συντελεστής μεταβλητότητας των νέων μισθών.

i)



αρα $850 = \bar{x} + 2\sigma$

$850 = 750 + 2\cdot\sigma$

$\sigma = 50$ τυπ. απο.

ii) $Y = 0{,}8 \cdot X + 10$

$E(Y) = E(0{,}8 \cdot X + 10) = 0{,}8 \cdot 750 + 10 = 610$

$V(Y) = V(0{,}8X + 10) = 0{,}8^2 \cdot 50^2 = 1600$

άρα $s(Y) = \sqrt{1600} = 40$

συνεπώς ο συντελεστής μεταβλητότητας $CV = \boxed{\dfrac{40}{610}}$

ΘΕΜΑ 2ο.

(α) (Βαθμοί 2) Ο (πενταψήφιος) κωδικός πρόσβασης σε μια ιστοσελίδα επιλέγεται από 4 γράμματα, 4 αριθμούς και 2 σύμβολα. Αν επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση τους, (i) ποιά είναι η πιθανότητα ένας κωδικός να περιέχει μόνον γράμματα; (ii) Αν η ιστοσελίδα έχει 10.000 χρήστες, πόσοι – κατά μέσον όρο – θα έχουν κωδικό αποτελούμενο μόνον από αριθμούς;

Όλοι $\underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}$ $\quad 10^5 = 100.000$

Μονο γραμματα $4^5 = 1024$

i) $P(\text{μονο γραμματα}) = \dfrac{1024}{100.000} = \boxed{0{,}01024}$

ii) $P(\text{μονο αριθμούς}) = 0{,}01024$

άρα $10.000 \cdot 0{,}01024 = 102{,}4 \simeq 103$ χρηστες

(β) (Βαθμοί 2). Σε μία εταιρεία διατίθενται τρείς τύποι ελαστικών E_1 E_2 και E_3, με πιθανότητα επιλογής 0,5, 0,3 και 0,2, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ένα ελαστικό να πληροί τις σχετικές προδιαγραφές (Π) είναι για το E_1 0,80, για το E_2 0,90 και για το E_3 0,90. Υπολογίστε: (i) την πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο ελαστικό να πληροί τις προδιαγραφές; (ii) αν ένα ελαστικό πληροί τις προδιαγραφές ποιά είναι η πιθανότητα να είναι το E_1;

i) Θ.Ο.Π.

$P(\Pi) = P(E_1)\cdot P(\Pi/E_1) + P(E_2)\cdot P(\Pi/E_2) + P(E_3)\cdot P(\Pi/E_3)$

$= 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}9$

$= \boxed{0{,}85} \doteq 85\%$

ii) Bayes

$P(E_1/\Pi) = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}8}{0{,}85} = \boxed{0{,}4705} \doteq 47{,}05\%$

(γ) (Βαθμός 1) Δίδεται η κατανομή 20 μικρομεσαίων επιχειρήσεων ανάλογα με την ετήσια δαπάνη τους για επενδύσεις.
Να υπολογιστεί και να ερμηνευθεί το 1° τεταρτημόριο (Q1).

Δαπάνες(σε χιλ.)	Αριθμός επιχειρήσεων
20 – 40	8
40 – 60	4
60 – 80	5
80 – 100	3

Δαπάνες(σε χιλ.)	Αριθμός επιχειρήσεων	F
20 – 40	8	8
40 – 60	4	12
60 – 80	5	17
80 – 100	3	20

$n = 20$

Το Q1 ανήκει στην ομάδα που έχει πρώτη φορά αθροιστική συχνότητα F>n/4 =20/4=5 . Αρα το Q1 ανήκει στην ομάδα (20-40)

$$Q_1 = L_{Q_1} + c\,\frac{\frac{n}{4} - F_{Q_1-1}}{f_{Q_1}} =$$

$$= 20 + 20\,\frac{5-0}{8} = 32{,}5$$

Ερμηνεία : Το 25% των επιχειρήσεων δαπανούν το πολύ 32,5 χιλ.€

ΘΕΜΑ 3°.
(α) Βαθμός 2) Η τυχαία μεταβλητή Χ ισούται με την μέγιστη τιμή των ενδείξεων δύο ζαριών που ρίχνονται τυχαία. Έστω F(x) η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Χ. Υπολογίστε την F(x) για x=0,3,5.
BONUS : Υπολογίστε τον γενικό τύπο της F(x) για x=1,2,3,4,5,6,

1η ρίψη \ 2η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

μόνο η ζαριά (1,1)

ζαριές (1,2) (2,1) (2,2)

$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{36}{36}$

Bonus: $F(x) = \frac{x^2}{36}, \quad x = 1,2,3,4,5,6$

(β) (Βαθμοί 1,5) Έστω Χ, Υ τ.μ. με πεδίο τιμών το σύνολο {0,1} και από κοινού σ.π. p(1,1) =1/2, p(0,1)=p(1,0)=1/4.
Έστω Z=XY. Υπολογίστε i) P(Z=1|X=1), ii) E(Z) iii) P(Z=0|X=0).

$x \backslash y$	0	1	P_x
0	0	1/4	1/4
1	1/4	1/2	3/4
P_y	1/4	3/4	

X	Y	Z	P
0	0	0	0
0	1	0	1/4
1	0	0	1/4
1	1	1	1/2

άρα

Z	0	1
P	1/2	1/2

άρα $E(Z) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

i) $P(Z=1 \mid X=1) = \frac{P(X=1 \cap Z=1)}{P(X=1)} = \frac{1/2}{3/4} = 4/6$

iii) $P(Z=0 \mid X=0) = \frac{1/4}{1/4} = 1$

(γ) <u>(βαθμός 1,5)</u> Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται στοιχεία τιμών (σε χιλ. ευρώ) και ποσοτήτων (σε τόνους) 3 προϊόντων που πουλήθηκαν κατά τα έτη 2018 και 2015. Δίδεται επίσης ότι η αξία τους κατά το έτος 2018 ήταν 160 χιλ. ευρώ.

Προϊόν	p_{15}	q_{15}	p_{18}
Α	5	4	7
Β	7	2	10
Γ	10	6	14

i) Να ο κατάλληλος αριθμοδείκτης τιμών, καθώς επίσης και ο δείκτης όγκου τους για το 2018 έναντι του 2015.

ii) Να βρεθεί η αποπληθωρισμένη αξία τους κατά το 2018 έναντι του 2015.

ΝΑ ΓΡΑΨΕΤΕ 2 ΑΠΟ ΤΑ 3 ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 1ω. 45λ. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

$e^{-1}=0,3679$, $e^{-2} = 0,1353$, $e^{-3}=0,0498$, $e^{-4}=0,018$.

i) $$P_{18,15} = \frac{\sum P_{18} \cdot q_{15}}{\sum P_{15} \cdot q_{15}} \cdot 100 = \frac{7\cdot 4 + 10\cdot 2 + 14\cdot 6}{5\cdot 4 + 7\cdot 2 + 10\cdot 6} \cdot 100 = \frac{132}{94} \cdot 100 = 140,4$$

$$Q'_{18,15} = \frac{\sum P_{18} \cdot q_{18}}{\sum P_{18} \cdot q_{15}} \cdot 100 = \frac{160}{132} \cdot 100 = 121,2$$

ii) $$V_{18}^{\text{Αποπ/.s}} = \frac{160}{140,4} \cdot 100 = 113,9 \text{ χιλ } €$$