Επαναληπτικές Ασκήσεις

Άσκηση 1: Ένας επιθετικός επενδυτής («επιδρομέας»), πέτυχε σε 4 από τις 40 προσπάθειες εξαγοράς που επιχείρησε. Ένας άλλος, σε 16 από τις 60. Υποθέτοντας ότι το ποσοστό επιτυχίας κάθε «επιδρομέα» σε μια προσπάθεια είναι ανεξάρτητο από τις άλλες προσπάθειες, και ότι οι πληροφορίες που παρουσιάζονται μπορεί να θεωρηθεί ότι βασίζονται σε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τη συνολική απόδοση των δύο «επιδρομέων» , μπορείτε να πείτε εάν ο ένας από τους δύο είναι πιο επιτυχημένος από τον άλλο? Εξηγείστε.

Απάντηση: $\hat{p}_1 = 4/40 = 0.10$ και $\hat{p}_2 = 16/60 = 0.267$ θα ελέγξουμε αν η διαφορά ποσοστών είναι υπέρ του «επιδρομέα» 2 δηλαδή

H_0: $p_1 - p_2 = 0$

H_1: $p_1 - p_2 \neq 0$, όπου $\hat{p} = \dfrac{4+16}{40+60} = \dfrac{20}{100} = 0.2$

$$z = \frac{\dfrac{x_1}{n_1} - \dfrac{x_2}{n_2}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.10 - 0.267}{\sqrt{0.2(1-0.2)\left(\dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{60}\right)}} = \frac{-0.167}{0.082} = -2,045$$

καθώς $z_{0.025}$=1.96 και $|z| = 2.045 > z_{\alpha/2} = 1.96$ η H_0 απορρίπτεται, σύμφωνα με τον έλεγχο ο πρώτος «επιδρομέας» έχει μικρότερο ποσοστό επιτυχίας έναντι του δεύτερου.

Άσκηση 2 : Οι βαθμολογίες 2 ομάδων φοιτητών σε ένα διαγώνισμα στατιστικής περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα. Τα γραπτά κάθε ομάδας διορθώθηκαν από διαφορετικό διδάσκοντα, της 1ης από τον Χ και της 2ης από τον Υ. Να ελεγχθεί η ισότητα των μέσων βαθμολογιών (α=0.05), αφού ελεγχθεί η ισότητα των διακυμάνσεων (α=0.05), ούτως ώστε να επιλεγεί ο κατάλληλος τύπος για τη στατιστική ελέγχου.

X	10	18	17	19	15	16	20	12	13	11
Y	7	15	16	17	12	14	18	10	11	

Δίνονται $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 2389, \sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 1704$.

Απάντηση: Έλεγχος για τη διαφορά των μέσων τιμών αφού ελέγξουμε την ισότητα των διακυμάνσεων. Υπολογίζουμε,

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{10} = \frac{151}{10} = 15.1, \text{ άρα } s_1^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n_1 - 1} = \frac{108.9}{9} = 12.1$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{9} = \frac{120}{9} = 13.33, \text{ άρα } s_2^2 = \frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}{n_2 - 1} = \frac{104.8}{8} = 13.1,$$

Έλεγχος <u>λόγου διακυμάνσεων</u> $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ έναντι $H_0: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.924, \; f^L_{9,8,0.025} = \frac{1}{f^U_{8,9,0.025}} = 1/4.102 = 0.244 \text{ και } f^U_{9,8,0.025} = 4.357$$

Καθώς $f^L_{9,8,0.025} < F = 0.924 < f^U_{9,8,0.025}$ δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και επομένως οι διακυμάνσεις **<u>μπορούν να θεωρηθούν ίσες</u>**.

Έλεγχος για τη διαφορά μέσων σε μικρά δείγματα **με ίσες διακυμάνσεις**

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{12.57} = 3.545 \text{ και } t = \frac{\overline{x} - \overline{y} - 0}{S_p \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{15.1 - 13.33}{3.545\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{9}}} = 1.087$$

Καθώς $|t|$=1.087< $t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} = t_{17,0.025} = 2.11$ η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται

Άσκηση 3: Αν οι μισθοί X ενός κλάδου εργαζομένων ακολουθούν κανονική κατανομή με άγνωστο μέσο μ και τυπική απόκλιση σ=50€, και $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ είναι τυχαίο δείγμα από τους μισθούς αυτούς, ποιο πρέπει να είναι το μέγεθος του δείγματος, ώστε με πιθανότητα 90% ο δειγματικός μέσος $\overline{X}_n$ να αποκλίνει από το μέσο μ του πληθυσμού το πολύ 10€?

Απάντηση : Θέλουμε να ισχύει η σχέση: $P(|\overline{x} - \mu| \leq 10) = 0.90 \Rightarrow P(-10 \leq \overline{x} - \mu \leq 10) = 0.90$

Γνωρίζουμε ότι $\overline{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ άρα $Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ η τυποποίηση του $\overline{x}$.

Οπότε, στη προηγούμενη σχέση διαιρούμε με $\sigma / \sqrt{n} = 50 / \sqrt{n}$ κατά μέλη για να ολοκληρωθεί η τυποποίηση.

$$\Rightarrow P(\frac{-10}{50/\sqrt{n}} \leq \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{10}{50/\sqrt{n}}) = 0.90 \Rightarrow P(\frac{-10}{50/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{10}{50/\sqrt{n}}) = 0.90 \Rightarrow$$

$$G(\frac{10}{50/\sqrt{n}}) - G(\frac{-10}{50/\sqrt{n}}) = 0.90 \Rightarrow G(\frac{10}{50/\sqrt{n}}) - 1 + G(\frac{10}{50/\sqrt{n}}) = 0.90 \Rightarrow 2G(\frac{10}{50/\sqrt{n}}) = 1.90$$

$$G(\frac{\sqrt{n}}{5}) = 0.95 = G(1.645) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{5} = 1.645 \Rightarrow n = 67.6$$

δηλαδή δείγμα μεγέθους τουλάχιστον 68.