ΤΟΠΑ- Οικονομετρία – 2024 Σεπτέμβρης - Καραγάνης

Θέμα 1

Για το υπόδειγμα $Y_i=\beta_0+\beta_1X_i+u_i$ δίνονται

Y_i	X_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{u}_i$
2	2	1.981	0.019
2	3		-0.668
3	6		
4	5		
5	9		
5	5	4.042	
8	9		1.21

$(X'X)^{-1}$	
0.853	-0.127
-0.127	0.023

Ζητούνται τα διαστήματα εμπιστοσύνης των εκτιμητών για τα β_0 και β_1

Να σχολιασθεί γιατί είναι δυνατή η ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας σε αυτό το υπόδειγμα;

$k=2$, $n=7$

$$X'Y=\begin{pmatrix}\sum Y_i = 29\\ \sum X_iY_i = 190\end{pmatrix}$$

$$\hat{b}=\begin{pmatrix}b_0\\ b_1\end{pmatrix}=(X'X)^{-1}X'Y$$

$$=\begin{pmatrix}0.853 & -0.127\\ -0.127 & 0.023\end{pmatrix}\begin{pmatrix}29\\ 190\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}607\\ 0{,}687\end{pmatrix}$$

αρα $\boxed{\hat{Y}_i = 0{,}607+0{,}687\cdot X_i}$

$$u_2 = Y_2 - \hat{Y}_2 \rightarrow \hat{Y}_2 = 2 + 0,668 = 2,668$$

$$u_6 = Y_6 - \hat{Y}_6 = 5 - 4.042 = 0.958$$

$$u_7 = Y_7 - \hat{Y}_7 \rightarrow \hat{Y}_7 = 8 - 1,21 = 6,79$$

$$u_3 = Y_3 - \hat{Y}_3 = 3 - (0.607 + 0,687 \cdot 6)$$

$$= 3 - 4,729 = -1,729$$

$$u_4 = Y_4 - \hat{Y}_4 = 4 - (0,607 + 0,687 \cdot 5)$$

$$= 4 - 4,042 = -0,042$$

$$u_5 = Y_5 - \hat{Y}_5 = 5 - 6,79 = -1,79$$

$\hat{u}_i$
0.019
-0.668
-1,729
-0,042
-1,79
$\boxed{0,958}$
1.21

Πίνακας Διακυμάνσεων-Συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών

$$V(b) = s^2 \cdot (X'X)^{-1} \quad (1)$$

$$s^2 = \frac{RSS}{n-K} \quad (2)$$

$$RSS = \sum u_i^2 = 0{,}019^2 + \dots + 1{,}21^2 = 9{,}024$$

$$(2) \rightarrow s^2 = \frac{9{,}024}{7-2} = 1{,}8$$

$$(1) \longrightarrow V(b) = 1{,}8 \cdot \begin{bmatrix} 0.853 & -0.127 \\ -0.127 & 0.023 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow V(b) = \begin{bmatrix} 1{,}53 & -0{,}23 \\ -0{,}23 & 0{,}041 \end{bmatrix}$$

95% Δ.Ε. για β_0 : $\hat{\beta}_0 \pm t_{n-k,\alpha/2} \cdot S_{\beta_0}$

$0{,}607 \pm t_{5,\,0.025} \cdot \sqrt{1{,}53}$

$0{,}607 \pm 2{,}571 \cdot \sqrt{1{,}53}$

$0{,}607 \pm 3{,}18$

$(0{,}607 - 3{,}18 \,,\, 0{,}607 + 3{,}18)$

$(-2{,}57 \,,\, 3{,}78)$

95% Δ.Ε. για β : $\hat{\beta}_1 \pm t_{n-k,\alpha/2} \cdot S_{\beta_1}$

$0{,}687 \pm t_{5,\,0.025} \cdot \sqrt{0{,}041}$

$0{,}687 \pm 2{,}571 \cdot \sqrt{0{,}041}$

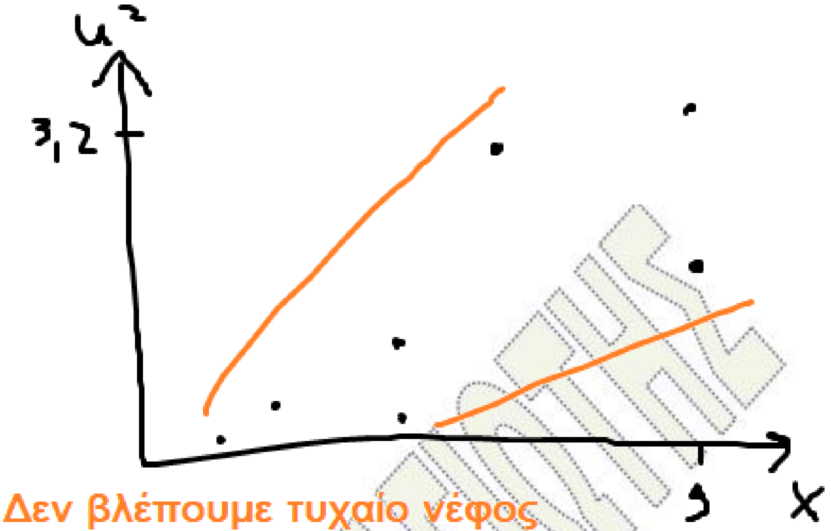
$0{,}687 \pm 0{,}52$

$(0{,}687 - 0{,}52 \,,\, 0{,}687 + 0{,}52)$

$(0{,}167 \,,\, 1{,}207)$

Διαγραμματικός Ελεγχος Ετεροσκεδαστικότητας

X	u_i^2
2	0,0003
3	0,44
6	2,99
5	0,0017
9	3,2
5	0,92
9	1,46



Δεν βλέπουμε τυχαίο νέφος
αλλα μια αυξητική τάση
συνεπώς ετεροσκεδαστικότητα

Θέμα 2

Σε δείγμα 100 επιχειρήσεων ζητούνται:

Να εκτιμηθούν οι συντελεστές σε εξίσωση παραγωγής τύπου Cobb Douglas ($Y_i=AL_i^{\alpha}K_i^{\beta}$)

Να διατυπωθούν οι απαραίτητοι μετασχηματισμοί στα δεδομένα, ώστε το υπόδειγμα να μπορεί να εκτιμηθεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

Να γίνει έλεγχος της υπόθεσης α+β=1 και να ερμηνευθεί οικονομικά

Να βρεθεί το κατάλοιπο για την επιχείρηση που παρατηρήθηκαν Y=26, L=71, K=1

Να σχολιασθεί γιατί είναι αδύνατη η ύπαρξη αυτοσυσχέτισης.

Δίνονται:

$(X'X)^{-1}$			$X'Y$	s_u^2
5.513227	-1.21325	-0.4858	78.05	0.044983
-1.21325	0.287959	0.059537	305.27	
-0.4858	0.059537	0.171898	119.15	

Λογαριθμικό Μετασχηματισμό

$$\ln Y_i = \ln\left(A \cdot L_i^{\alpha} \cdot K_i^{\beta}\right)$$

$$\ln Y_i = \ln A + \alpha \ln L_i + \beta \ln K_i$$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \ln A \\ a \\ b \end{pmatrix} = (X'X)^{-1} \cdot X'Y =$$

$$= \begin{bmatrix} 5.513227 & -1.21325 & -0.4858 \\ -1.21325 & 0.287959 & 0.059537 \\ -0.4858 & 0.059537 & 0.171898 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 78.05 \\ 305.27 \\ 119.15 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2,05 \\ 0,3 \\ 0,74 \end{pmatrix}$$

αρα $\ln Y_i = 2.05 + 0.3 \ln L_i + 0,74 \cdot \ln K_i$

$$V(b) = s^2 \cdot (X'X)^{-1} = 0,045 \cdot \begin{bmatrix} 5.513227 & -1.21325 & -0.4858 \\ -1.21325 & 0.287959 & 0.059537 \\ -0.4858 & 0.059537 & 0.171898 \end{bmatrix}$$

$$V(b) = \begin{bmatrix} 0,25 & -0,05 & -0.02 \\ -0,05 & 0,01 & 0,0026 \\ -0,02 & 0,0026 & 0,0076 \end{bmatrix}$$

t-έλεγχος

$$\boxed{H_0: a+b=1}$$

$$H_1: a+b \neq 1$$

$$t = \frac{\hat{a}+\hat{b}-1}{\sqrt{V(a+b)}} \quad (1)$$

$$V(a+b) = 1^2 V(a) + 1^2 V(b) + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot Cov(a,b)$$
$$= 1 \cdot 0.01 + 1 \cdot 0.0076 + 2 \cdot 0,0026$$
$$= 0,023$$

$$(1) \quad t = \frac{0,3+0,74-1}{\sqrt{0,023}} = 0,263$$

$$|t| = 0,263 < t_{97,0.025} = 1,96$$

Δεν απορρίπτεται η Ho συνεπώς η συνάρτηση παραγωγής παρουσιάζει στατιστικά σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

$$u_i = Y_i - \hat{Y}_i = \ln 26 - (2,05 + 0,3 \cdot \ln 71 + 0,74 \cdot \ln 1)$$

$$u_i = 3,258 - 3,328 = \boxed{-0,0708}$$

Είναι αδύνατη η ύπαρξη αυτοσυσχέτισης διότι το υποδειγμα παραγωγής περιέχει και τους 2 σημαντικούς προσδιοριστικούς παράγοντες , την εργασία και το κεφάλαιο δηλαδή είναι ορθά εξειδικευμένο υπόδειγμα.

ΕΞΤΡΑ ΕΡΩΤΗΜΑ : Να προβλεθεί η παραγόμενη ποσότητα όταν L=71 και K=100.

$$\ln Y = 7{,}05 + 0{,}3 \cdot \ln 71 + 0{,}74 \cdot \ln 100$$

$$\ln Y = 6{,}74$$

$e \qquad e$

$$Y = e^{6{,}74} = 845{,}56$$

Θέμα 3
Να αποδειχθούν:
$b=(X'X)^{-1}X'Y$
$V(b)=\sigma^2(X'X)^{-1}$

Απόδειξη: Η μέθοδος βασίζεται στην ελαχιστοποίηση του RSS=$e' \cdot e$ άρα υπολογίζουμε το $e' \cdot e$ και μηδενίζουμε την πρώτη παράγωγο.

$Y = Xb + e \rightarrow e = Y - Xb$ άρα

$$RSS = e' \cdot e = (Y - Xb)' \cdot (Y - Xb) = \left(Y' - (Xb)'\right) \cdot (Y - Xb) = (Y' - b'X') \cdot (Y - Xb) =$$

$$= Y'Y - Y'Xb - b'X'Y + b'X'Xb$$

Ισχύει ότι $Y'Xb = b'X'Y$ καθώς το $Y'Xb$ είναι αριθμός και ισούται με το ανάστροφο του $b'X'Y$ άρα

$$RSS = e' \cdot e = Y'Y - 2b'X'Y + b'X'Xb$$

<u>Ελαχιστοποίηση</u>:

$$\frac{\partial e' \cdot e}{\partial b} = 0 \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε το } b'} 0 - 2X'Y + 2X'Xb = 0 \rightarrow 2X'Xb = 2X'Y \rightarrow X'Xb = X'Y \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{επι } (X'X)^{-1} \text{ απο αριστερά}} b = (X'X)^{-1} X' \cdot Y$$

Επίσης η συνθήκη δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 e' \cdot e}{\partial b^2} = 2X'X > 0$$ άρα πράγματι ελάχιστο.

Απόδειξη: $V(b)=E\left[\left(b-E(b)\right)\cdot\left(b-E(b)\right)'\right]\xrightarrow{E(b)=\beta}E\left[\left(b-\beta\right)\cdot\left(b-\beta\right)'\right]$ [1]

Όμως ισχύει

$b=\left(X'X\right)^{-1}X'\cdot Y\xrightarrow{Y=X\beta+\varepsilon}\left(X'X\right)^{-1}X'\cdot(X\beta+\varepsilon)=\beta+\left(X'X\right)^{-1}X'\varepsilon$ άρα
η [1] γίνεται

$$V(b)=E\left[\left(\beta+\left(X'X\right)^{-1}X'\varepsilon-\beta\right)\cdot\left(\beta+\left(X'X\right)^{-1}X'\varepsilon-\beta\right)'\right]=E\left[\left(\left(X'X\right)^{-1}X'\varepsilon\right)\cdot\left(\left(X'X\right)^{-1}X'\varepsilon\right)'\right]=$$

$$\xrightarrow{(X'X)^{-1}\,\text{συμμετρικός}}E\left[\left(X'X\right)^{-1}X'\varepsilon\cdot\varepsilon'X\left(X'X\right)^{-1}\right]\xrightarrow{X\,\text{σταθερό}}$$

$$V(b)=\left(X'X\right)^{-1}X'\cdot\underbrace{E(\varepsilon\cdot\varepsilon')}_{\sigma^2 I}\cdot X\left(X'X\right)^{-1}=\left(X'X\right)^{-1}X'\cdot\sigma^2 I\cdot X\left(X'X\right)^{-1}=\sigma^2\underbrace{\left(X'X\right)^{-1}X'\cdot X}_{I}\left(X'X\right)^{-1}\rightarrow$$

$$\rightarrow V(b)=\sigma^2\cdot\left(X'X\right)^{-1}$$