ΤΟΠΑ – Μαθηματικά 2 – 2024 Ιούλιος Μιμής - Ομάδα Α

Θέμα 1. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{0} 1/x^2 dx$ (β) Να προσεγγίσετε την συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$ με την χρήση πολυωνύμου 4ου βαθμού στο διάστημα [0,1].

Θέμα 2. α) Να αποδειχθεί ότι η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών

$$a_0 y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + \cdots + a_n y_x = b(x)$$

είναι $y_x = \psi_x + y_x^0$ όπου ψ_x μια μερική της λύση και y_x^0 η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς. β) Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 8 * 5^t$, με $y_0 = 1$ και $y_1 = 6$.

Θέμα 3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\dot{y} - y + by^2 = 0$

Θέμα 4. Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για ένα αγαθό δίνονται από τις σχέσεις:

συνάρτηση ζήτησης: $Q_{Dt} = \alpha + \beta \cdot P_t$

συνάρτηση προσφοράς: $Q_{St} = \gamma + \delta \cdot P_{t-1}$

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών της τιμής και να μελετήσετε την ευστάθεια της λύσης για τις τιμές των παραμέτρων α=60, β=-5, γ=12 και δ=3.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{0} 1/x^2dx$ (β) Να προσεγγίσετε την συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$ με την χρήση πολυωνύμου 4ου βαθμού στο διάστημα [0,1].

α)

$$I=\int_{-1}^{0} x^{-2}dx = \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{-1}^{0} = \left.-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0}$$

$$= -\left(\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}-\frac{1}{-1}\right) = -(-\infty+1) = +\infty$$

β) MacLaurin της $f(x)=e^{-x}$

$$e^{-x} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \quad (1)$$

$f(0)=e^0=1$

$f'(x)=-e^{-x} \longrightarrow f'(0)=-1$

$f''(x)=e^{-x} \longrightarrow f''(0)=1$

$f'''(x)=-e^{-x} \rightarrow f'''(0)=-1$

$f^{(4)}(x)=e^{-x} \rightarrow f^{(4)}(0)=1$

$$(1) \rightarrow e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

ΚΡΥΣΤΑΛΛΙΔΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

Θέμα 2. α) Να αποδειχθεί ότι η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών

$$a_0 y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + \cdots + a_n y_x = b(x)$$

είναι $y_x = \psi_x + y_x^0$ όπου ψ_x μια μερική της λύση και y_x^0 η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς. β) Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 8 * 5^t \quad , \quad \text{με } y_0 = 1 \ \kappa\alpha\iota\ y_1 = 6.$$

α) Για την ομογενή ισχύει ότι

$$a_0 \cdot y^0_{x+n} + \dots + a_n \cdot y^0_x = 0$$

Για την μερική λύση ισχύει ότι

$$a_0 \cdot \psi_{x+n} + \dots + a_n \cdot \psi_x = b(x)$$

Αρα για το άθροισμα τους δηλαδή την γενική λύση ισχύει ότι

$$a_0 y_{x+n} + \dots + a_n y_x = b(x)$$

ii) $y_{t+2} - 4 \cdot y_{t+1} + 3 \cdot y_t = 8 \cdot 5^t$

Βήμα 1. Λύνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

με $\Delta > 0$ και ρίζες $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = 1$ (απλή ρίζα το 1, δεν επηρεάζει, και δεν έχουμε ρίζα το 5)

Η λύση της ομογενούς είναι $y_O = c_1 \cdot (3)^t + c_2 \cdot (1)^t = c_2 + c_1 \cdot (3)^t$

Βήμα 2. Βρίσκουμε μία μερική λύση αντικαθιστώντας $y_M = c \cdot 5^t$

$$c \cdot 5^{t+2} - 4c \cdot 5^{t+1} + 3c \cdot 5^t = 8 \cdot 5^t \rightarrow (25c - 20c + 3c)5^t = 8 \cdot 5^t \rightarrow$$

$$8c = 8 \rightarrow c = 1$$

άρα $y_M = 5^t$

Άρα γενική λυση: $y_t = c_2 + c_1 \cdot (3)^t + 5^t$

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = 1 \rightarrow 1 = c_2 + c_1 + 1 \rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad (1) \\ y_1 = 6 \rightarrow 6 = c_2 + 3c_1 + 5 \rightarrow 3c_1 + c_2 = 1 \quad (2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = 0{,}5 \\ c_2 = -0{,}5 \end{array}$$

Αρα $y_t = -0.5 + 0{,}5 \cdot 3^t + 5^t$

Ευστάθεια $\lim\limits_{t \to \infty} y_t = +\infty$ **αρα μή ευσταθής**

Θέμα 3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\dot{y} - y + by^2 = 0$

$y' - y = -by^2$ (Διαφορική Εξίσωση Bernoulli με n=2)

Πολλαπλασιάζουμε την Διαφορική Εξίσωση με $-\frac{1}{y^2}$

$$-\frac{1}{y^2}y' + \frac{1}{y^2}y = b \rightarrow -\frac{1}{y^2}y' + \frac{1}{y} = b$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $w = \frac{1}{y} \rightarrow w' = -\frac{1}{y^2} \cdot y'$

$$w' + w = b$$

Προέκυψε γραμμική Διαφορική Εξίσωση

$$\left(\begin{array}{l} \textbf{Γραμμική: } y'(x) + A(x)y(x) = B(x) \\ \textbf{Λύση: } y(x) = e^{-\int A(x)dx}\left[c + \int B(x)e^{\int A(x)dx}dx\right] \end{array} \right)$$

αρα $w(x) = e^{-\int 1 dx} \cdot \left[c + \int b \cdot e^{\int 1 dx} dx\right]$

$$w(x) = e^{-x} \cdot \left[c + b \cdot e^{x}\right]$$

$$w(x) = c \cdot e^{-x} + b$$

και αφου $w = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{w}$

αρα $\boxed{y(x) = \frac{1}{c \cdot e^{-x} + b}}$

Θέμα 4. Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για ένα αγαθό δίνονται από τις σχέσεις:

συνάρτηση ζήτησης: $Q_{Dt} = \alpha + \beta \cdot P_t$

συνάρτηση προσφοράς: $Q_{St} = \gamma + \delta \cdot P_{t-1}$

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών της τιμής και να μελετήσετε την ευστάθεια της λύσης για τις τιμές των παραμέτρων α=60, β=-5, γ=12 και δ=3.

$Q_D = 60 - 5P_t \quad , \quad Q_S = 12 + 3P_{t-1}$

Ισορροπία $Q_D = Q_S \rightarrow 60 - 5P_t = 12 + 3P_{t-1}$

$5P_t + 3P_{t-1} = 48$

$P_t + \frac{3}{5}P_{t-1} = 9{,}6$

Χαρακτηριστική Εξίσωση $\lambda + \frac{3}{5} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{3}{5}$

αρα $P_{OM} = c\left(-\frac{3}{5}\right)^t$

αρα $P_{OM} = c\left(-\frac{3}{5}\right)^t$

Θεωρούμε σταθερή μερική λύση $P_M = A$

$A + \frac{3}{5}A = 9{,}6 \rightarrow P_M = 6$

Αρα γενική λύση $P_t = c\left(-\frac{3}{5}\right)^t + 6$

ευσταθεια

$\lim_{t \to \infty} P_t = 6$ ευσταθης