ΔΔ – Μαθηματικά 2 -2022 Ιούνιος - Κόρδας , Βαβουρα

Γρηγόρης Κόρδας

1. Θεωρήστε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Βρείτε: (a) AB, (b) $\operatorname{tr}(I - A)$, (c) $\det(AB)$, (d) A^{-1}.

Απάντηση :

a) $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Το ίχνος tr ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου άρα

$$\operatorname{tr}(I - A) = 0 + 0 + 0 = 0$$

c) $$\det(AB) = \det \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ Laplace 1η γραμμή

$$= +6 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = \boxed{-2}$$

d) $\det A = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot(-1) - 2\cdot(-1) + 0 = 1$

Άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}$$

2. Λύστε το παρακάτω γραμμικό σύστημα χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 6 \\ 3x-2y+z &= -5 \\ x+3y-2z &= 14. \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 14 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -3 \text{ αρα } x = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 14 & -2 \end{vmatrix} = -9 \text{ αρα } y = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 14 \end{vmatrix} = 6 \text{ αρα } z = \frac{6}{-3} = -2$$

Συνεπώς η μοναδική λύση του συστήματος είναι (x,y,z) = (1,3,-2)

3. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ιδιοτιμές $\det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \rightarrow (3-\lambda)\cdot(-\lambda)-1\cdot(-2)=0$$

$$\rightarrow -3\lambda+\lambda^2+2=0 \rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0$$

Βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου με Διακρίνουσα

$$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

Αρα ιδιοτιμές λ1=2 και λ2=1

Ιδιοδιανύσματα

Για $\lambda_1=2$: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow x-2y=0 \rightarrow x=2y$$

αρα $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}=y\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Για $\lambda_2=1$: $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow x-y=0 \rightarrow x=y$$

αρα $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}=y\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Συνεπώς τα ιδιοδιανύσματα είναι $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$z = f(x, y) = x^2 - 2y^2 + xy - 2x - y$$

και ταξινομήστε τα.

Συνθήκη 1ης τάξης

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x + y - 2 = 0 \\ -4y + x - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array}$$

άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο A (1,0)

Συνθήκη 2ης τάξης με Εσσιανό

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ο Εσσιανός είναι αόριστος άρα στο σημείο Α δεν έχουμε ακρότατο παρά σαγματικό σημείο