Άσκηση 1: Α) Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$ (M2)

Απάντηση:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 2\\ -3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda-3)=0\Rightarrow\boxed{\lambda_1=2,\lambda_2=3}$$

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=2$, επιλύουμε το σύστημα

$$(A-2I)\vec{x}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow -2x_1+2x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$$

Ιδιοχώρος $(x_1,x_2)=(x_2,x_2)=x_2(1,1),\ \ x_2\in\mathbb{R}$ και ιδιοδιάνυσμα είναι το $u_1=(1,1)^T$.

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=3$, επιλύουμε το σύστημα

$$(A-3I)\vec{x}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow -3x_1+2x_2=0\Rightarrow x_1={}^2\!/_3\,x_2$$

Ιδιοχώρος $(x_1,x_2)=({}^2\!/_3\,x_2,x_2)=x_2({}^2\!/_3,1),\ \ x_2\in\mathbb{R}$ και ιδιοδιάνυσμα είναι το $u_1=(2/3,1)^T$.

Διαγωνιοποίηση:

$$A=PDP^{-1}=\begin{bmatrix}1 & {}^2\!/_3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & {}^2\!/_3\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & {}^2\!/_3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -2\\ -3 & 3\end{bmatrix}$$

EXTRA: Να υπολογιστεί ο πίνακας A^5

Απάντηση: $A^5=PD^5P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & {}^2\!/_3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2^5 & 0\\ 0 & 3^5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -2\\ -3 & 3\end{bmatrix}$

B) Να δείξετε ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον ανάστροφο του. (M1)

Απάντηση: $\det\left(A^T-\lambda I\right)=\det\left[\left(A-\lambda I\right)^T\right]\underset{\det(A)=\det(A^T)}{=}\det\left(A-\lambda I\right)$

ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, συνεπώς ίδιες ιδιοτιμές

Άσκηση 2: (Τασό) Αν ισχύει: $A^3-3A+5I=0$ τότε να δείξετε ότι ο πίνακας: $(2A+I)$ αντιστρέφεται και να βρεθεί ο αντίστροφος του. (M_∞)

Απάντηση:

$$\underbrace{(2A+I)\cdot\left(\kappa A^2+\lambda A+\mu I\right)}_{3^{ου}\ \beta\alpha\theta\mu o\acute{\upsilon}}=2\kappa A^3+(2\lambda+\kappa)A^2+(2\mu+\lambda)A+\mu I$$

Οι συντελεστές των δυνάμεων του Α της δοσμένης σχέσης είναι 1, 0 (για A^2) και -3

Εξισώνοντας έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}2\kappa&=1\\ 2\lambda+\kappa&=0\\ 2\mu+\lambda&=-3\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}\kappa&=1/2\\ \lambda&=-1/4\\ \mu&=-11/8\end{aligned}\right.$$

Άρα

$$(2A+I)\cdot\left(\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{4}A-\frac{11}{8}I\right)=A^3-3A-\frac{11}{8}I\xrightarrow{A^3-3A=-5I}-5I-\frac{11}{8}I=-\frac{51}{8}I$$

$$\text{Άρα}\quad (2A+I)^{-1}=-\frac{8}{51}\cdot\left(\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{4}A-\frac{11}{8}I\right)$$