Άσκηση : (Ιούνιος 2013) Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $x\left(\frac{dy}{dx}\right)=y+\sqrt{9x^2+y^2}$

Απάντηση: Ομογενής $x\left(\frac{dy}{dx}\right)=y+\sqrt{9x^2+y^2} \to \underbrace{y+\sqrt{9x^2+y^2}}_{P(x,y)} \underbrace{-x}_{Q(x,y)}\ y'=0$

με $P(x,y)=y+\sqrt{9x^2+y^2}$, $1^{ου}$ βαθμού και $Q(x,y)=-x$, $1^{ου}$ βαθμού

Θέτω $y(x)=x\cdot w(x)$ άρα $y'=w+xw'$ και μετατρέπεται σε χωριζομένων μεταβλητών.

$$y+\sqrt{9x^2+y^2}-xy'=0 \xrightarrow{y=x\cdot w} x\cdot w+\sqrt{9x^2+(x\cdot w)^2}-x(w+xw')=0 \to$$

$$\to |x|\sqrt{9+w^2}=x^2w' \to \frac{|x|}{x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{9+w^2}}dw \to \int\frac{|x|}{x^2}dx=\int\frac{1}{\sqrt{9+w^2}}dw$$

Ολοκλήρωση κατά μέλη

$$\int\frac{1}{\sqrt{9+w^2}}dw \overset{\text{τριγωνομετρική B}}{=} \ln\left|w+\sqrt{9+w^2}\right|+C$$

• Για x>0 $\int\frac{|x|}{x^2}dx=\int\frac{x}{x^2}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|=\ln x$

Άρα $\ln x=\ln\left|w+\sqrt{9+w^2}\right|+C \to x=\left|w+\sqrt{9+w^2}\right|\cdot e^C \xrightarrow{w=\frac{y}{x}} x=\left|\frac{y}{x}+\sqrt{9+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right|\cdot e^C$

• Για x<0 $\int\frac{|x|}{x^2}dx=\int\frac{-x}{x^2}dx=\int-\frac{1}{x}dx=-\ln|x|=-\ln(-x)=\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$

Άρα $\ln\left(-\frac{1}{x}\right)=\ln\left|w+\sqrt{9+w^2}\right|+C \to -\frac{1}{x}=\left|w+\sqrt{9+w^2}\right|\cdot e^C \xrightarrow{w=\frac{y}{x}} -\frac{1}{x}=\left|\frac{y}{x}+\sqrt{9+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right|\cdot e^C$

Αναλυτικά η τριγωνομετρική αντικατάσταση B

$\int\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx \to$ θέτουμε $x=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{1}}\varepsilon\varphi t \Rightarrow x=3\varepsilon\varphi t$ **άρα** $dx=3\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt$

$$\int\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx \underset{dx=3\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt}{\overset{x=3\varepsilon\varphi t}{\to}} \int\frac{1}{\sqrt{9+3(3\varepsilon\varphi t)^2}}3\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int\frac{1}{\sqrt{9+9\varepsilon\varphi^2 t}}3\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int\frac{1}{3\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 t}}3\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu^2 t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}+\frac{\eta\mu^2 t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int\frac{\sigma\upsilon\nu t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int\frac{1}{\sigma\upsilon\nu t}dt=\ln\left|\varepsilon\varphi t+\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 t}\right|$$

Η αντικατάσταση δίνει $x=3\varepsilon\varphi t \to \begin{cases}\varepsilon\varphi t=\frac{1}{3}x\\ \varepsilon\varphi^2 t=\frac{1}{9}x^2\end{cases}$ άρα

$$I=\ln\left|\varepsilon\varphi t+\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 t}\right| \underset{\varepsilon\varphi^2 t=\frac{1}{9}x^2}{\overset{\varepsilon\varphi t=\frac{1}{3}x}{\to}} \ln\left|\frac{1}{3}x+\sqrt{1+\frac{1}{9}x^2}\right|=\ln\left|\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\sqrt{9+x^2}\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{1}{3}\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)\right|=\ln\left(\frac{1}{3}\right)+\ln\left|x+\sqrt{9+x^2}\right|=\ln\left|x+\sqrt{9+x^2}\right|+C$$