Άσκηση : (Ιούνιος 2013) Να επιλυθεί η : $y_k + y_{k-1} + \frac{1}{4} y_{k-2} = 1 + 2k$ με $y_0 = 0$ και $y_1 = 1$

Απάντηση: Εξίσωση διαφορών 2ης τάξης $y_k + y_{k-1} + \frac{1}{4} y_{k-2} = 1 + 2k$

Χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς $\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = 0$ με διακρίνουσα Δ=0 και διπλή ρίζα -1/2.

•Λύση της ομογενούς $y_t^0 = c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^t + c_2 t\left(-\frac{1}{2}\right)^t$.

•Μερική λύση της μορφής του δεξιού μέλους, δηλαδή $y_t^\mu = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \cdot t$ η οποία επαληθεύει την εξίσωση διαφορών, δηλαδή

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \cdot (t) + \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \cdot (t-1) + \frac{1}{4}\left(\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \cdot (t-2)\right) = 1 + 2t \to \ldots \to \frac{9}{4}\mathrm{A}_0 - \frac{6}{4}\mathrm{A}_1 + \frac{9}{4}\mathrm{A}_1 t = 1 + 2t \to$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{9}{4}\mathrm{A}_0 - \frac{6}{4}\mathrm{A}_1 = 1 \\ \frac{9}{4}\mathrm{A}_1 = 2 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}_0 = \frac{84}{81} \\ \mathrm{A}_1 = \frac{8}{9} \end{array}\right\}$$

•Μερική λύση : $y_t^\mu = \frac{84}{81} + \frac{8}{9} \cdot t$

•Γενική λύση $y_t = y_t^0 + y_t^\mu = c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^t + c_2 t\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{84}{81} + \frac{8}{9} \cdot t$

<u>Αρχικές Συνθήκες</u>

Για t=0, $y(0) = 0 \Rightarrow c_1(-\frac{1}{2})^0 + c_2 \cdot 0(-\frac{1}{2})^0 + \frac{84}{81} + \frac{8}{9} \cdot 0 = 0 \to c_1 = -\frac{84}{81}$

Για t=1, $y(1) = 1 \Rightarrow -\frac{84}{81}(-\frac{1}{2})^1 + c_2 \cdot 1(-\frac{1}{2})^1 + \frac{84}{81} + \frac{8}{9} \cdot 1 = 1 \to c_2 = \frac{117}{81}$

άρα

Γενική Λύση : $y_t = y_t^0 + y_t^\mu = -\frac{84}{81}\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{117}{81} t\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{84}{81} + \frac{8}{9} \cdot t$

Ευστάθεια : $\lim_{t\to\infty} -\frac{84}{81}\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{117}{81} t\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{84}{81} + \frac{8}{9} \cdot t = 0 + 0 + \frac{84}{81} + \infty = \infty$ μη ευσταθής

<u>Κανόνας L΄Hopital</u>:

$$\lim_{t\to\infty} t\left(\frac{1}{2}\right)^t = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{2^t} \xrightarrow{\infty/\infty} \lim_{t\to\infty} \frac{(t)'}{(2^t)'} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2^t \cdot \ln 2} \to \frac{1}{\infty} \to 0$$