Άσκηση 1 : Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $I=\int \frac{x^4+1}{x^3-1}dx$, β) $I=\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2017}}dx$

Απάντηση:

α) Πολυωνιμική διαίρεση

$$\frac{x^4+1}{x^3-1}=\frac{\left(x^3-1\right)x+x+1}{x^3-1}=x+\frac{x+1}{x^3-1}=x+\frac{x+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)} \text{ άρα}$$

$$I=\int xdx+\int \frac{x+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}dx=x^2/2+\int \frac{x+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}dx \quad (1)$$

Για το 2^o ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{x+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1}=...=\frac{2/3}{x-1}+\frac{-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1} \text{ άρα } 2/3\ln|x-1|+\int \frac{-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}dx$$

Για το 2^o δημιουργούμε στον αριθμητή την παράγωγο του παρανομαστή

$$-\frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=-\frac{1}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|$$

Άρα συνολικά $I=x^2/2+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|$

β) Θέτω $u=x+\sqrt{x^2+2017}$

$$\left.\begin{array}{l} u=x+\sqrt{x^2+2017} \\ du=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2017}}\right)dx \Rightarrow dx=\frac{\sqrt{x^2+2017}}{u}du \end{array}\right\} \to I=\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2017}}\frac{\sqrt{x^2+2017}}{u}du=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|=$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+2017}\right|$$

Άσκηση 2 : Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ.Ε.

α) $y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}$, β) $\left(x^2-y^2+y\right)dy+xdx=0$ **με** $y(2)=1$

Απάντηση :

α) Μορφή : $\frac{x^2+y^2}{2xy}-1y'=0$

Ομογενής ΔΕ με $P(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2xy}$ $0^{ου}$ *βαθμού* ομογένειας και

$Q(x,y)=-1$ *επίσης* $0^{ου}$ *βαθμού*

Θέτω $y(x)=x\cdot w(x)$ άρα $y'=w+xw'$ και μετατρέπεται σε χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{x^2+x^2w^2}{2xxw}-\left(w+xw'\right)=0\to \frac{1+w^2}{2w}-w-xw'=0\to xw'=\frac{1+w^2-2w^2}{2w}\to$$

$$\to xw'=\frac{1-w^2}{2w}\to \frac{2w}{1-w^2}w'=\frac{1}{x}$$

Άρα $\frac{2w}{1-w^2}dw = \frac{1}{x}dx$

Ολοκλήρωση $\int \frac{2w}{1-w^2}dw = \int \frac{1}{x}dx \xrightarrow{\int \frac{f'}{f}} -\ln\left|1-w^2\right| = \ln|x| + c \xrightarrow{w=\frac{y}{x}} -\ln\left|1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| = \ln|x| + c$

β) $xdx + \left(x^2 - y^2 + y\right)dy = 0$ **με** $y(2) = 1$

$P(x,y) = x$ και $Q(x,y) = x^2 - y^2 + y$

- Δεν είναι ομογενής
- Ελέγχω για ακριβής

$$\left.\begin{matrix} P_y = 0 \\ Q_x = 2x \end{matrix}\right\} \to \text{Όχι ακριβής}$$

- Ελέγχω για πολλαπλασιαστή Euler

$\frac{P_y - Q_x}{Q}$ του x: $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{0-2x}{x^2 - y^2 + y}$ ΟΧΙ

$\frac{Q_x - P_y}{P}$ του y: $\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{2x-0}{x} = 2$ ΝΑΙ $\mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P}dy} = e^{\int 2dy} = e^{2y}$

$xdx + \left(x^2 - y^2 + y\right)dy = 0 \xrightarrow{\varepsilon\pi\iota\, e^{2y}} e^{2y}xdx + e^{2y}\left(x^2 - y^2 + y\right)dy = 0$ και γίνεται ακριβής

Πράγματι για $P(x,y) = e^{2y}x$ και $Q(x,y) = e^{2y}\left(x^2 - y^2 + y\right)$

$$\left.\begin{matrix} P_y = 2xe^{2y} \\ Q_x = 2xe^{2y} \end{matrix}\right\} \to \text{ακριβής}$$

Πεπλεγμένη λύση : $\Phi(x,y) = c$ όπου $\Phi(x,y) = \int Pdx + \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right)\right]dy$

- $\int Pdx = \int \left(e^{2y}x\right)dx \xrightarrow{\mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}} e^{2y}\frac{x^2}{2}$ (ολοκληρώνω θεωρώντας τα y σταθερές)
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2y}\frac{x^2}{2}\right) = 2e^{2y}\frac{x^2}{2} = e^{2y}x^2$
- $\int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right)\right]dy = \int \left[\left(e^{2y}\left(x^2 - y^2 + y\right)\right) - e^{2y}x^2\right]dy = \int -e^{2y}y^2 + e^{2y}ydy =$

$= -\int e^{2y}y^2dy + \int e^{2y}ydy$

Παραγοντική

$$\left.\begin{matrix} \int e^{2y}ydy = \ldots = \frac{1}{2}ye^{2y} - \frac{1}{4}e^{2y} \\ -\int e^{2y}y^2dy = -\left(\frac{1}{2}y^2e^{2y} - \frac{1}{2}ye^{2y} + \frac{1}{4}e^{2y}\right) \end{matrix}\right\} \to -\int e^{2y}y^2dy + \int e^{2y}ydy = -\frac{1}{2}y^2e^{2y} + ye^{2y} - \frac{1}{2}e^{2y}$$

Άρα, $\Phi(x,y) = \int Pdx + \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right)\right]dy = e^{2y}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}y^2e^{2y} + ye^{2y} - \frac{1}{2}e^{2y} = c$

Συνθήκη: $y(2) = 1 \to e^{2\cdot1}\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2}1^2e^{2\cdot1} + 1\cdot e^{2y} - \frac{1}{2}e^{2\cdot1} = c \to c = 2e^2$

Άσκηση 3: Να λυθεί η εξίσωση διαφοράς και να εξετασθεί η σύγκλιση της.
α) $y_{t+1} - 2\cdot y_t = 3\cdot 2^t$ με $y_0 = 1$, β) $y_{t+2} + 4y_{t+1} + 4y_t = 8$ με αρχικές συνθήκες y(1)=4 και y(0)=3

Απάντηση:

α) $y_{t+1} - 2\cdot y_t = 3\cdot 2^t$ **με** $\mathbf{y}_0 = 1$ Λύση ομογενούς $y_O = c\cdot(2)^t$

Λόγω της μορφής του δεξιού μέλους, καθώς η βάση του δεξιού μέλους είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης θεωρούμε μερική λύση $y_M = c_1\cdot t\cdot 2^t$ και αντικαθιστούμε στην εξίσωση διαφορών:

$$y_{t+1} - 2\cdot y_t = 3\cdot 2^t \xrightarrow{y_M = c_1\cdot t\cdot 2^t}$$

$$\to c_1\cdot(t+1)2^{t+1} - 2c_1\cdot t\cdot 2^t = 3\cdot 2^t \to 2c_1\cdot 2^t - 3\cdot 2^t = 0 \to 2^t\left(2c_1 - 3\right) = 0 \to$$

$$\to 2c_1 - 3 = 0 \to c_1 = \frac{3}{2}$$

άρα $y_M = \frac{3}{2}\cdot t\cdot 2^t$

Η **Γενική Λύση** θα είναι : $y_t = y_O + y_M = c\cdot(2)^t + \frac{3}{2}\cdot t\cdot 2^t$

Λόγω της αρχικής συνθήκης $y_0 = 1 \Rightarrow c\cdot(2)^0 + \frac{3}{2}\cdot 0\cdot 2^0 = 1 \Rightarrow c = 1$

Τελικά $y_t = (2)^t + \frac{3}{2}\cdot t\cdot 2^t$

Ευστάθεια $\lim\limits_{t\to\infty} y_t = \lim\limits_{t\to\infty}(2)^t + \frac{3}{2}\cdot t\cdot 2^t = 2^t\cdot\left(1 + \frac{3}{2}\cdot t\right) = \infty\cdot\infty = \infty$ μη ευσταθής

β) $y_{t+2} + 4y_{t+1} + 4y_t = 8$ με αρχικές συνθήκες y(1)=4 και y(0)=3

Χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ με διακρίνουσα Δ=0 και διπλή ρίζα -2.

Λύση της ομογενούς $y_t^{\,0} = c_1(-2)^t + c_2 t(-2)^t$.

Μερική λύση της μορφής του δεξιού μέλους, δηλαδή σταθερά, $y_t^{\,\mu} = \mathrm{A}$ η οποία επαληθεύει την εξίσωση διαφορών, δηλαδή

$$\mathrm{A} + 4\mathrm{A} + 4\mathrm{A} = 8 \Rightarrow 9\mathrm{A} = 8 \Rightarrow \mathrm{A} = \frac{8}{9}$$

Γενική λύση $y_t = y_t^{\,0} + y_t^{\,\mu} = c_1(-2)^t + c_2 t(-2)^t + \frac{8}{9}$

Για t=0, $y(0) = 3 \Rightarrow 3 = c_1 + \frac{8}{9} \Rightarrow c_1 = \frac{19}{9}$

Για t=1, $y(1) = 4 \Rightarrow 4 = c_1(-2) + c_2(-2) + \frac{8}{9} \overset{c_1 = 19/9}{\Rightarrow} c_2 = -\frac{33}{9}$

άρα

$$y_t = y_t^{\,0} + y_t^{\,\mu} = \frac{19}{9}(-2)^t - \frac{33\cdot t}{9}(-2)^t + \frac{8}{9}$$

Ευστάθεια : Αποκλίνει λόγω του $(-2)^t$ με ταλάντωση, μη ευσταθής.

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΙΔΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΝΕΑ POST, ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ FACEBOOK