5. Riccati : $y'(x)=P(x)y^2(x)+Q(x)y(x)+R(x)$ **(τριώνυμο του y στο δεξί μέλος)**

Λύση : Έχουμε μια μερική (δοσμένη) λύση της, έστω $y_1(x)$ τότε θεωρώ την <u>αντικατάσταση</u>

$y(x)=y_1(x)+\dfrac{1}{z(x)}$ άρα έχουμε και $y'=y_1'-\dfrac{z'}{z^2}$ και ανάγεται σε γραμμική ως προς z(x).

Παρατήρηση: Αν R(x)=0 ανάγεται σε Bernoulli με n=2 ενώ αν P(x)=0 ανάγεται σε γραμμική.

Εφαρμογή : Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'=\dfrac{1}{x}y^2+\dfrac{1}{x}y-\dfrac{2}{x}$, $x>0$ με $y_1(x)=1$

Λύση: Riccati με $P(x)=Q(x)=\dfrac{1}{x}$ και $R(x)=-\dfrac{2}{x}$

<u>Αντικατάσταση</u> : $y(x)=y_1(x)+\dfrac{1}{z(x)}\rightarrow y(x)=1+\dfrac{1}{z(x)}$ άρα $y'=\left(1+\dfrac{1}{z(x)}\right)'=-\dfrac{z'}{z^2}$ τότε

$$y'=\frac{1}{x}y^2+\frac{1}{x}y-\frac{2}{x}\xrightarrow[y'=-\frac{z'}{z^2}]{y=1+\frac{1}{z}}-\frac{z'}{z^2}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{z}\right)^2+\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{z}\right)-\frac{2}{x}\xrightarrow{\varepsilon\pi\iota\ z^2}$$

$$\rightarrow -z'=\frac{z^2}{x}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{z^2}{x}\left(1+\frac{1}{z}\right)-\frac{2z^2}{x}\rightarrow -z'=\frac{z^2}{x}+\frac{2z}{x}+\frac{1}{x}+\frac{z^2}{x}+\frac{z}{x}-\frac{2z^2}{x}\rightarrow$$

$$\rightarrow -z'=\frac{3z}{x}+\frac{1}{x}\rightarrow z'+\frac{3}{x}z=-\frac{1}{x}$$

<u>Γραμμική</u> της μορφής $z'(x)+A(x)z(x)=B(x)$ με $A(x)=\dfrac{3}{x}, B(x)=-\dfrac{1}{x}$

Γενική λύση $y(x)=e^{-\int A(x)dx}[c+\int B(x)e^{\int A(x)dx}dx]$ όπου

$$\int A(x)dx=\int\frac{3}{x}dx=3\ln|x|\xrightarrow{x>0}3\ln x$$

$$\int B(x)e^{\int A(x)dx}dx=\int-\frac{1}{x}e^{3\ln x}dx=\int-\frac{1}{x}x^3dx=-\int x^2dx=-\frac{x^3}{3}$$

άρα $z(x)=e^{-\int A(x)dx}[c+\int B(x)e^{\int A(x)dx}dx]=e^{-3\ln x}\left[c-\dfrac{x^3}{3}\right]=x^{-3}\left[c-\dfrac{x^3}{3}\right]=\dfrac{c}{x^2}-\dfrac{1}{3}$

Επιστρέφοντας στην αρχική αντικατάσταση $y(x)=1+\dfrac{1}{z(x)}$ έχουμε :

$y(x)=1+\dfrac{1}{\frac{c}{x^2}-\frac{1}{3}}$ αποτελεί την τελική λύση της αρχικής Δ.Ε.

Άσκηση 1. Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ.Ε.

i) $y'=1+x^2-2xy+y^2$, με $y_1(x)=x$

ii) $y'=\dfrac{1}{x}y^2+\dfrac{1}{x}y-\dfrac{2}{x}$, με $y_1(x)=1/x$

iii) $(x^2-y^2-y)dx+xdy=0$, (με $y_1(x)=x$)

[**Απ.** i) $y(x)=x+(c-x)^{-1}$ ii) $y(x)=x^{-1}+2x(c-x^2)^{-1}$ iii) $y(x)=x+\dfrac{2x}{2ce^{-2x}-1}$]

ΘΕΩΡΙΑ

1. Χωριζομένων μεταβλητών : $P(x)+Q(y)y'(x)=0$ **(μπορούμε να διαχωρίσουμε τα x,y)**

Λύση: Ολοκληρώνουμε κατά μέλη

$$P(x)+Q(y)\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow Q(y)dy=-P(x)dx \Rightarrow \int Q(y)dy=-\int P(x)dx$$

Εναλλακτική μορφή : $P(x)\cdot dx+Q(y)\cdot dy=0$ (αν διαιρέσω με dx ανάγεται στην αρχική μορφή)

2. Ομογενής : $P(x,y)+Q(x,y)y'(x)=0$ όταν P,Q ομογενείς συναρτήσεις δηλαδή

$P(tx,ty)=t^nP(x,y)$ και $Q(tx,ty)=t^mQ(x,y)$

Εναλλακτική μορφή : $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

Λύση: Μετατρέπεται σε εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών μετά τον μετασχηματισμό $y(x)=x\cdot w(x)$ με $y'=w+xw'$

3. Γραμμική : $y'(x)+A(x)y(x)=B(x)$ **Λύση:** $y(x)=e^{-\int A(x)dx}[c+\int B(x)e^{\int A(x)dx}dx]$

4. Bernoulli : $y'(x)+P(x)y(x)=Q(x)y^n(x)$ με $n\neq 0,1$ (**δύναμη του y στο δεξί μέλος**)

Λύση: Πολλαπλασιάζουμε τη δ.ε. με $\frac{1-n}{y^n}$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $w(x)=y^{1-n}(x)$ και προκύπτει γραμμική δ.ε. ως προς w.

5. Riccati : $y'(x)=P(x)y^2(x)+Q(x)y(x)+R(x)$ **(τριώνυμο του y στο δεξί μέλος)**

Λύση : Έχουμε μια μερική (δοσμένη) λύση της έστω $y_1(x)$ τότε θεωρώ την αντικατάσταση

$y(x)=y_1(x)+\frac{1}{z(x)}$ άρα έχουμε και $y'=y_1'-\frac{z'}{z^2}$ και ανάγεται σε γραμμική ως προς z(x).

6. Ακριβής : $P(x,y)+Q(x,y)y'(x)=0$ όταν $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

Λύση: $\Phi(x,y)=c$ όπου $\Phi(x,y)=\int Pdx+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right)\right]dy$

Εναλλακτική μορφή : $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ με $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

7. Euler : $P(x,y)+Q(x,y)y'(x)=0$ δέχεται τον **πολλαπλασιαστή Euler** μ(x,y) όταν η ΣΔΕ $\mu(x,y)P(x,y)+\mu(x,y)Q(x,y)y'(x)=0$ είναι ακριβής.

Λύση:

α. Αν η $\frac{P_y-Q_x}{Q}$ είναι συνάρτηση του x, τότε χρησιμοποιούμε πολλαπλασιαστή $\mu(x)=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx}$

β. Αν η $\frac{Q_x-P_y}{P}$ είναι συνάρτηση του y, τότε χρησιμοποιούμε πολλαπλασιαστή $\mu(y)=e^{\int\frac{Q_x-P_y}{P}dy}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

•Για διαφορικές της μορφής $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

1) Ελέγχω αν είναι ομογενής

2) Ελέγχω αν είναι ακριβής $P_y=Q_x$

3) Ελέγχω αν υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler : $\frac{P_y-Q_x}{Q}$ του x ή $\frac{Q_x-P_y}{P}$ του y

4) Διαιρώ με dx : $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ «καθαρίζω» το y' και ελέγχω αν ανήκει σε κάποια από τις υπόλοιπες κατηγορίες Δ.Ε.

ΕΠΙΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

Α)Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

1) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)=y+\sqrt{9x^2+y^2}$

2) $\left(\frac{dy}{dx}\right)+2\frac{y}{x}=4x$

3) $(t-2)y'+y=7(t-2)y^3$

4) $(x-y)ydx+x^2dy=0$

5) $\left(\frac{dy}{dx}\right)=3+3x^2y-xy^2$

Β) Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω Διαφορικές Εξισώσεις:

1) $2x\left(y\exp\left(x^2\right)-1\right)dx+\exp\left(x^2\right)dy=0$

2) $2xy^2dx+x^3dy=0$

3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{y}{x}=y^3$

4) $xy'+y=(x\ln x)y^2$

5) $xy(1+x^2)y'=1+y^2$

6) $\left(x^2-y^2-y\right)dx+xdy=0$

Γ) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

1) $I=\int\frac{x}{x^2-9}dx$

2) $\mathrm{I}=\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ (υπόδειξη : τριγωνομετρική αντικατάσταση $x=\varepsilon\varphi t$)

3) I= $\int\frac{(x+1)}{x^3+x^2-6x}dx$

4) $I=\int\frac{x^4+1}{x^3-1}dx$ (υπόδειξη : πολυωνυμική διαίρεση)

5) $\mathrm{I}=2\int_{-\rho}^{+\rho}\sqrt{\rho^2-x^2}dx$ (εμβαδό κυκλικού δίσκου $\mathrm{E}=\pi\cdot\rho^2$)

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΙΔΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ FACEBOOK