ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- **Βαθμωτό γινόμενο** : Για $\lambda \in R$ και διάνυσμα $\tilde{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ισχύει $\lambda \cdot \tilde{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, ..., \lambda v_n)$

π.χ. $2 \cdot (2 \quad 1) = (2 \cdot 2 \quad 2 \cdot 1) = (4 \quad 2)$

- **Γινόμενο διανυσμάτων** : (εσωτερικό γινόμενο) πολλαπλασιάζουμε στοιχείο-στοιχείο και αθροίζουμε τα γινόμενα. Το αποτέλεσμα είναι αριθμός και η πράξη γίνεται γραμμή επί στήλη.

π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = -1 + 8 + 6 = 13$

ΠΙΝΑΚΕΣ

• Ονομάζουμε **πίνακα διάστασης mxn**, μια ορθογώνια διάταξη με m-γραμμές και n-στήλες

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

π.χ.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}_{2x3}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3x1} \textit{πινακας στηλη}, \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1x3} \textit{πίνακας γραμμή}$$

• **Ίχνος (trace) πίνακα** : tr(A) είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Πράξεις μεταξύ πινάκων

• **Πρόσθεση** : γίνεται στοιχείο με στοιχείο, άρα σε πίνακες ίδιας διάστασης

• **Βαθμωτό γινόμενο** : Πολλαπλασιάζονται όλα τα στοιχεία με τον αριθμό.

$$\textit{Άν}, \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \textit{και} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \quad \textit{τότε}$$

$$\mathrm{A} + 2\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -14 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -14 & 9 \end{bmatrix}$$

- **Γινόμενο πινάκων**: $A_{mxn} B_{nxk} = \Gamma_{mxk}$.Το στοιχείο γ_{ij} του γινομένου AB προκύπτει από το <u>εσωτερικό γινόμενο</u> της i γραμμής του πίνακα A επί τη j στήλη του πίνακα B,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -7 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

<u>Παρατήρηση</u> : Το **γινόμενο AB ορίζεται** όταν ο αριθμός των στηλών του A είναι ίδιος με των αριθμό των γραμμών του B.

Γενικά **AB ≠ BA** όταν πρόκειται για πίνακες.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

• **Μοναδιαίος** : Διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου άσσους.

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \text{μοναδιαίος } 2\text{ης}-\text{τάξης},\qquad I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \text{μοναδιαίος } \mathbf{3}\text{ης}-\text{τάξης}$$

Ο **μοναδιαίος** αποτελεί το ουδέτερο στοιχείου στον πολλαπλασιασμό πινάκων , δηλαδή για κάθε πίνακα Α ισχύει ότι : $\mathbf{A\cdot I=I\cdot A=A}$

• **Αντίστροφος** ενός τετραγωνικού πίνακα Α, συμβολίζεται A^{-1} και ισχύει $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$.

$$\text{Αν } A=\begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix} \text{ τότε } A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix} \text{ πράγματι } A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

••**Ανάστροφος** του πίνακα A_{mxn} καλείται ο πίνακας A'_{nxm} που έχει ως γραμμές τις στήλες του Α.

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&0&-6\end{bmatrix}_{2x3} \Rightarrow A'=\begin{bmatrix}2&1\\3&0\\4&-6\end{bmatrix}_{3x2}$$

<u>Ιδιότητες</u> : $1)\,(A+B)'=A'+B'\quad 2)\,(\lambda A)'=\lambda A'\quad 3)\,(A\cdot B)'=B'\cdot A'$

• **Συμμετρικός** λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας Α όταν $A'=A$,

π.χ. $A=\begin{bmatrix}1&3&-2\\3&-1&5\\-2&5&0\end{bmatrix}\Rightarrow A'=A$ Η κύρια διαγώνιος αποτελεί άξονα συμμετρίας.

Άσκηση 1. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν οι πίνακες Α και Β είναι αντίστροφοι.

i) $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}$ ii) $A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\2&5&-3\\-3&2&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}14&-8&-1\\-17&10&1\\-19&11&1\end{pmatrix}$

• **Εύρεση αντιστρόφου τετραγωνικού πίνακα**

- <u>Αντίστροφος 2x2 πίνακα</u> Αν $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ τότε $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$

$$\det(A)=1\cdot4-2\cdot3=4-6=-2 \text{ άρα } A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{bmatrix}$$

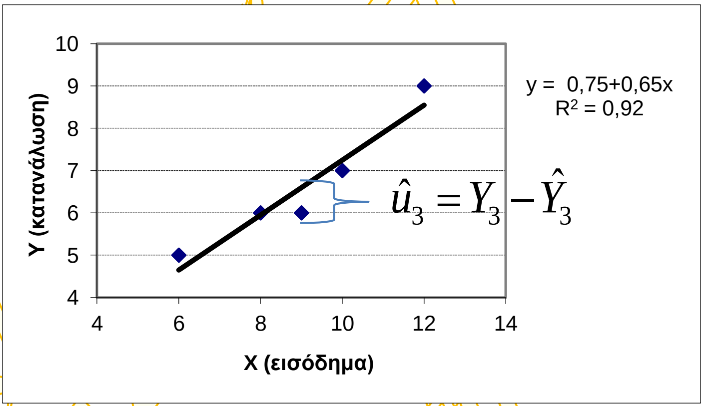
Πρόταση: για ένα διαγώνιο πίνακα $A_n=\begin{bmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{bmatrix}$ ισχύει $A^{-1}=\begin{bmatrix}1/d_1&&\\&\ddots&\\&&1/d_n\end{bmatrix}$.

π.χ. Αν $A=\begin{bmatrix}4&0\\0&0,5\end{bmatrix}$ τότε $A^{-1}=\begin{bmatrix}1/4&0\\0&1/0,5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,25&0\\0&2\end{bmatrix}$

Εισαγωγή – Απλή Παλινδρόμηση

Άσκηση 2. Από δείγμα 5 νοικοκυριών για το εισόδημα και τη κατανάλωση προέκυψαν τα ακόλουθα στοιχεία *(οι μεταβλητές είναι μετρημένες σε χιλιάδες ευρώ)*

i	**X** *εισόδημα*	**Y** *κατανάλωση*
1	9	6
2	6	5
3	8	6
4	12	9
5	10	7



Ανεξάρτητη μεταβλητή Χ (ερμηνευτική): το εισόδημα

Εξαρτημένη μεταβλητή Υ: Η κατανάλωση

Απλή Παλινδρόμηση

$$\underbrace{Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t}_{\text{συστηματικό μέρος (ακριβής σχέση)}} + \underbrace{u_t}_{\text{μη συστηματικό μέρος}}$$ <u>στοχαστική</u> σχέση, u τυχαία μεταβλητή

Οι συντελεστές β_0, β_1 εκτιμούνται από το δείγμα και έχουμε τους **εκτιμητές** $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ συνεπώς η **γραμμή παλινδρόμησης** είναι: $\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$.

Οι διαφορές πραγματικών και προβλεπόμενων τιμών λέγονται **κατάλοιπα** $\underline{\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t}$ ($\hat{\varepsilon}_t$ ή e_t)

Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων:
Από τις άπειρες ευθείες που μπορούμε να φέρουμε επιλέγουμε εκείνη τη γραμμή για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων γίνεται ελάχιστο. Υπολογίζουμε δηλαδή τους εκτιμητές $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$, ώστε να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση

$$RSS = (Residuals\ Sum\ Squares) = \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t)^2$$

Sos-Παρατήρηση: Το σημείο $(\bar{X}, \bar{Y})$ ανήκει πάντα στην ευθεία άρα ισχύει $\boxed{\bar{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \bar{X}}$

Πολυμεταβλητή Παλινδρόμηση- Πολλαπλό υπόδειγμα

*Η Υ εξαρτάται από **κ-1 ερμηνευτικές** μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$*

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_{k-1} X_{ik-1} + u_i \ , \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

(συνολικά **κ συντελεστές** $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ προς εκτίμηση)

Περιγραφή με μήτρες:

$\boxed{Y = X\beta + u}$ όπου
$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1,k-1} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2,k-1} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \ldots & X_{n,k-1} \end{bmatrix}_{n\times k} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{\kappa-1} \end{bmatrix}_{k\times 1} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

•Εκτιμητής Ελαχίστων Τετραγώνων (Ε.Τ.-OLS) : $\underline{\hat{\beta} = b = (X' \cdot X)^{-1} X' \cdot Y}$ (απόδειξη σελ. 2)

Θέμα (2013) Δίνεται η εξίσωση $Y_i = \beta_0 + \beta_1 * 1/\chi_i + \varepsilon_i$.
Δίνονται τα στοιχεία:

Χρόνος:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_i	4,8	5,1	3,0	3,8	3,1	2,7	3,0	3,0	2,9	3,2
χ_i	4,2	4,3	6,8	5,5	5,6	6,7	5,6	5,7	5,2	4,2

Δίνεται η κατάλληλα εκτιμημένη μήτρα $(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 3.589665 & -18.2536 \\ -18.2536 & 95.48017 \end{bmatrix}$

Ζητείται η εκτίμηση του υποδείγματος:

Απάντηση : $b = (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot Y$

Χρειαζόμαστε την ποσότητα $X' \cdot Y$ άρα κατασκευάζουμε τον πίνακα X όπου οι τιμές πρέπει να αντιστραφούν καθώς $X^* = 1/X$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/4,2 & 1/4,3 & \ldots & & & & & & \ldots & 1/4,2 \end{bmatrix} =$$

συνεπώς

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,23809 & 0,232558 & \ldots & & & & & & \ldots & 0,23809 \end{bmatrix}$$

$$X' \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,23809 & 0,232558 & \ldots & & & & & & \ldots & 0,23809 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4,8 \\ 5,1 \\ \ldots \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 3,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34,6 \\ 6,79917 \end{bmatrix}$$

Άρα, το εκτιμώμενο υπόδειγμα είναι :

$$b = (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot Y = \begin{bmatrix} 3.589665 & -18.2536 \\ -18.2536 & 95.48017 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 34,6 \\ 6,79917 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{0.093027}^{\beta_0} \\ \underbrace{17.61162}_{\beta_1} \end{bmatrix}$$

Συμπερασματικά το υπόδειγμα είναι : $\boxed{\hat{Y}_i = 0,093027 + 17,61162 \cdot {}^{1}\!/_{X_i}}$

Παρατήρηση : Η μεταβλητή ${}^{1}\!/_{X_i}$ επιλέχθηκε από τον ερευνητή διότι η σχέση των μεταβλητών X,Y φαίνεται να είναι αντίστροφη (παρατήρησε τα δεδομένα).

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΝΗΜΕΡΩΣΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ FACEBOOK