# Επαναληπτική Άσκηση

**α)** Να βρεθούν τα όρια: **i)** $\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{1}{t-3}\cdot\int_3^t e^{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ **ii)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$

**β)** Ανάπτυγμα Taylor της $f(x)=x^{\ln x}$ μέχρι και τον όρο $(x-e)^2$. Ν.δ.ο $f(1.1\cdot e)/e\approx 1,22$

**γ)** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x}$

**δ)** Να αποδειχθεί η παρακάτω ταυτότητα $\arcsin(x)+\arccos(x)=\dfrac{\pi}{2}\quad \forall x\in[-1,1]$

**ε)** Να δείξετε ότι η εξίσωση $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0,1]$.

**στ)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\dfrac{2}{3-5\cos x}dx$ με χρήση της αντικατάστασης $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

**ζ)** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int\left(\dfrac{x}{x^3-2x^2+2x-4}-\arctan(x)\right)dx$

**η)** Να λυθεί η δ.ε. $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

**Απαντήσεις α)**

i) $$\lim_{t\to 3}\frac{1}{t-3}\cdot\int_3^t e^{\sqrt{1+x^2}}\,dx \xrightarrow{0/0}\lim_{t\to 3}\frac{\left(\int_3^t e^{\sqrt{1+x^2}}\,dx\right)'}{(t-3)'}=\lim_{t\to 3}e^{\sqrt{1+t^2}}=e^{\sqrt{10}}$$

**ii) Κριτήριο Λόγου:** $$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}}\right|=\frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n}=\frac{2}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$$ άρα

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1$$ συνεπώς για την αρχική ακολουθία έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}=0$

**Παρατήρηση**: Άρα και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$ συγκλίνει.

β) $f(x)=x^{\ln x}=e^{\ln x^{\ln x}}=e^{(\ln x)^2}\Rightarrow f(e)=e^{1^2}=e$

$f'(x)=e^{(\ln x)^2}\,2\ln x\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(e)=2e\dfrac{1}{e}=2$

$f''(x)=4e^{(\ln x)^2}(\ln x)^2\dfrac{1}{x^2}+2e^{(\ln x)^2}\dfrac{1}{x^2}-2e^{(\ln x)^2}\ln x\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f''(e)=4\dfrac{1}{e}+2\dfrac{1}{e}-2\dfrac{1}{e}=\dfrac{4}{e}$

$f(x)=e+2(x-e)+\dfrac{2}{e}(x-e)^2$ Συνεπώς $f(1,1e)\approx e+2(0,1e)+\dfrac{2}{e}(0,1e)^2=1,22e$

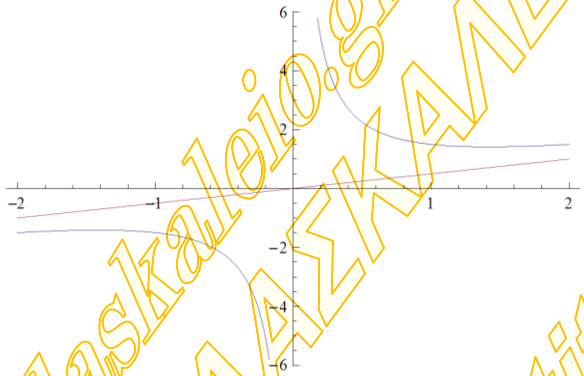
γ) Για κατακόρυφη εξετάζουμε το 0 ( σημείο ασυνέχειας)

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\to\dfrac{2}{+0}=+\infty$ ( και επιπρόσθετα $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\to\dfrac{2}{-0}=-\infty$ ) άρα κατ. ασυμπ. το x=0.

Πλάγια ασύμπτωτη: Αν $y=ax+\beta$ ασύμπτωτη μη κατακόρυφη τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{1}{x}=0$ άρα στο $+\infty$ πλάγια ασυμπ. y=1/2 *x

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{1}{x}=0$ άρα στο $-\infty$ πλάγια ασυμπ. y=1/2 *x




**δ)** Σταθερή → μηδενική παράγωγος. Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=\arcsin(x)+\arccos(x)$

$$f'(x)=\left(\arcsin(x)+\arccos(x)\right)'=\left(\arcsin(x)\right)'+\left(\arccos(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

Άρα η συνάρτηση f(x) είναι σταθερή → $f(x)=c$

Προσδιορισμός σταθεράς : $f(0)=\arcsin(0)+\arccos(0)=0+\pi/2=\pi/2$ (τόξο με συνημίτονο 0?...)

**ε)** $f(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-a-b-c=0$, f συνεχής στο $[0,1]$ και

$f(0)=-a-b-c,\quad f(1)=3a+2b+c$, δεν «βγαίνει» με Bolzano.

Η παράγουσα της f, $F(x)=ax^4+bx^3+cx^2-ax-bx-cx$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $F(0)=0=F(1)$ άρα από Rolle $\exists$ τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$, ώστε $F'(\xi)=f(\xi)=0$.

**στ)** Λόγω της γενικής αντικατάστασης έχουμε : $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int\frac{2}{3-5\cos x}dx=\int\frac{2}{3-5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2\cdot 2}{3+3t^2-5+5t^2}dt=\int\frac{2}{4t^2-1}dt=$$

$$=2\int\frac{1}{(2t)^2-1^2}dt=2\int\frac{1}{(2t-1)(2t+1)}dt=2\cdot\int\frac{A}{(2t-1)}+\frac{B}{(2t+1)}dt=...=2\cdot\int\frac{1/2}{(2t-1)}+\frac{-1/2}{(2t+1)}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2}{(2t-1)}dt-\frac{1}{2}\int\frac{2}{(2t+1)}dt=\frac{1}{2}\cdot\ln|2t-1|-\frac{1}{2}\cdot\ln|2t+1|$$

Άρα,

$$\int\frac{2}{3-5\cos x}dx\xrightarrow{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{1}{2}\cdot\ln\left|2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|+C$$

**Παρατήρηση:** Αν $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ τότε για $b_n=\frac{1}{2}\frac{1}{(2n-1)}$ έχουμε $a_n=b_n-b_{n+1}$ οπότε η τηλεσκοπική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=b_1-\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=1/2$

**ζ)** $\mathrm{I}=\int\left(\frac{x}{x^3-2x^2+2x-4}-\arctan(x)\right)dx=\underbrace{\int\frac{x}{x^3-2x^2+2x-4}dx}_{I_1}-\underbrace{\int\arctan x dx}_{I_2}$

Ολοκλήρωμα $I_1$: Παραγοντοποίηση παρανομαστή

Ο παρανομαστής γράφεται ως $x^3-2x^2+2x-4=x^2\left(x-2\right)+2\left(x-2\right)=(x-2)(x^2+2)$

Εναλλακτική προσέγγιση: Αναζητούμε προφανείς ρίζες του πολυωνύμου στους διαιρέτες του σταθερού όρου $\pm1,\pm2,\pm4$ κατόπιν πολυωνυμική διαίρεση με (x-2).

Άρα, $I_1=\int\frac{x}{(x-2)(x^2+2)}dx$

Αναζητούμε σταθερές Α,Β,Γ ώστε $\frac{x}{(x-2)(x^2+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B\cdot x+\Gamma}{x^2+2}$… Α=1/3, Β=-1/3, Γ=1/3. Άρα

$$I_1=\int\frac{x}{(x-2)(x^2+2)}dx=\int\frac{1/3}{x-2}dx+\int\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+2}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|x-2\right|-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|x-2\right|-\frac{1}{2\cdot3}\int\frac{2x}{x^2+2}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|x-2\right|-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}^2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|x-2\right|-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)+\frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|x-2\right|-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)+\frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\cdot x}{2}\right)\quad (A)$$

Ολοκλήρωμα $I_2$: $I_2=\int\arctan(x)dx=\int(x)'\arctan(x)dx=$

$$=x\cdot\arctan(x)-\int\frac{x}{x^2+1}dx=x\cdot\arctan(x)-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=x\cdot\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\quad (B)$$

Τελικά το αρχικό ολοκλήρωμα ισούται με $(A)-(B)$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{3}\ln\left|x-2\right|-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)+\frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\cdot x}{2}\right)-x\cdot\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$$

**η)** Ομογενής Δ.Ε. 1ης τάξης ως $\left(x^2+y^2\right)dx+\left(-x\cdot y\right)dy=0$ με P,Q ομογενής 2ου βαθμού.

Εναλλακτικά, ομογενής Δ.Ε. αφού η $y'$ είναι ομογενής μηδενικού βαθμού

Θέτω $y(x)=x\cdot u(x)$ άρα $y'(x)=u(x)+x\cdot u'(x)$ και η δ.ε. γίνεται

$u+x\cdot u'=\frac{x}{x\cdot u}+\frac{x\cdot u}{x}\Rightarrow u+x\cdot u'=\frac{1}{u}+u\Rightarrow x\cdot u'=\frac{1}{u}$ που είναι χωριζομένων μεταβλητών

$$x\cdot u'=\frac{1}{u}\Rightarrow u\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\Rightarrow udu=\frac{1}{x}dx\Rightarrow\frac{u^2}{2}=\ln\left|x\right|+c$$

$$\Rightarrow u^2=2\ln\left|x\right|+c_1\Rightarrow u=\pm\sqrt{2\ln\left|x\right|+c_1}$$

και $y(x)=x\cdot u(x)=\pm x\sqrt{2\ln\left|x\right|+c_1}$

**Παρατήρηση** : Μετά τον Filip έχει ανηφόρα … ξεκινώντας με Linux