Επαναληπτικές Ασκήσεις

Άσκηση.1 Να διερευνηθεί το ακόλουθο σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $k \in \mathbb{R}$

$$x+y-z=1$$
$$3x+4y+kz=4$$
$$4x+(k+5)y+(k+3)z=6$$

Απάντηση Με γραμμοπράξεις μετασχηματίζουμε τον επαυξημένο σε κλιμακωτό:

$$A/b=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 4 & k & 4\\ 4 & (k+5) & (k+3) & 6\end{bmatrix}\begin{matrix}\Gamma_2=\Gamma_2-3\Gamma_1\\ \Gamma_3=\Gamma_3-4\Gamma_1\end{matrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & (k+3) & 1\\ 0 & (k+1) & (k+7) & 2\end{bmatrix}\Gamma_3=\Gamma_3-(k+1)\Gamma_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & (k+3) & 1\\ 0 & 0 & -(k+1)(k+3)+(k+7) & -(k+1)+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & (k+3) & 1\\ 0 & 0 & -k^2-3k+4 & 1-k\end{bmatrix}$$

Περίπτωση 1 : $-k^2-3k+4=-(k-1)(k+4)$ =0 Άρα k=1 ή k=-4

Περίπτωση 1.1 : **k=1** : ***rank(A)=rank(A/b)=2<3=n άπειρες με μία παράμετρο***

$$\left.\begin{matrix}x+y-z=1\\ y+4z=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=1+5z\\ y=-4z\end{matrix}\right\}\rightarrow(x,y,z)=(1+5z,-4z,z),z\in R$$

Περίπτωση 1.2 : **k=-4**: ***rank(A)=2 ≠ rank(A/b) =3 Αδύνατο***

Περίπτωση 2 : k≠1 και k≠-4 ***rank(A)=rank(A/b)=3=n μοναδική λύση***
Εύρεση με πίσω αντικατάσταση, δηλαδή με επίλυση ξεκινώντας από την τελευταία γραμμή…

Άσκηση.2 Έστω U_1, U_2, δύο υπόχωροι του R^3.

$U_1=\{(x,y,z)\in R^3 : x=2y\}$, $U_2=\{(x,y,z)\in R^3 : x-2y+3z=0\}$

1) Βρείτε μία βάση και την διάσταση των υποχώρων $U_1, U_2, U_1\cap U_2, U_1+U_2$.

2) Αποτελεί ο $\mathbb{R}^3$ το ευθύ άθροισμα των 2 χώρων, δηλαδή ισχύει $U_1\oplus U_2=\mathbb{R}^3$**?**

Απάντηση: α) Αποδεικνύουμε τις 2 ιδιότητες

β) Για τον U_1 :

$(x,y,z)=(2y,y,z)=y(2,1,0)+z(0,0,1)$ τα 2 στοιχεία αποτελούν βάση καθώς είναι ανεξάρτητα και dim(U_1)=2

Για τον U_2 : Ισχύει $x=2y-3z$

$(x,y,z)=(2y-3z,y,z)=y(2,1,0)+z(-3,0,1)$ τα 2 στοιχεία αποτελούν βάση καθώς είναι ανεξάρτητα και $\dim(U_2)=2$

Για την τομή :

$U_1 \cap U_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)\in U_1, (x,y,z)\in U_2\}$

Το στοιχείο (x,y,z) του $U_1 \cap U_2$ ικανοποιεί ταυτόχρονα τις

$$\left.\begin{matrix} x=2y \\ x-2y+3z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=2y \\ 2y-2y+3z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=2y \\ 3z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=2y \\ z=0 \end{matrix}\right\}$$

άρα $(x,y,z)=(2y,y,0)=y(2,1,0)$ δηλαδή

$U_1 \cap U_2 = \{y(2,1,0) : y\in\mathbb{R}\}$

Βάση το {(2,1,0)}, διάσταση 1.

Για την ένωση: Βρίσκουμε πια στοιχεία των 2 βάσεων είναι ανεξάρτητα

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\Gamma_4=\Gamma_4+\frac{3}{2}\Gamma_1}{\xrightarrow{\Gamma_3=\Gamma_3-\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon\nu\alpha\lambda\lambda\alpha\gamma\acute{\eta}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

άρα dim $(U_1+U_2)=3=\mathbb{R}^3$

γ) Δεν είναι ευθύ άθροισμα καθώς η διάσταση της τομής είναι 1.

Άσκηση.3

Η γραμμική απεικόνιση $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ έχει για πίνακα ως προς τις κανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{R}^3$ τον $A_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

α) Να βρεθεί η T(x,y,z)

β) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του πεδίου τιμών της T

γ) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του πυρήνα της T

δ)Να βρείτε τον πίνακα αναπαράστασης της T ως προς τις βάσεις

B={ $v_1=(0,1)$,$v_2=(1,1)$ } και B'={ $w_1=(1,0,0)$, $w_2=(1,1,0)$, $w_3=(1,1,1)$ } αντίστοιχα των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$

Απάντηση:

α) T(x,y,z)= $A\cdot x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y+3z \\ -x+2y-3z \end{pmatrix}$

Άρα , $T(x,y,z)=(x-2y+3z,-x+2y-3z)$

β) Θεωρούμε τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$, $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$ τότε

$\mathrm{T}(e_1)=\mathrm{T}(1,0,0)=(1,-1)$

$\mathrm{T}(e_2)=\mathrm{T}(0,1,0)=(-2,2)$ Εξ αυτών γραμ. ανεξάρτητο μόνο το (1,-1) άρα dim ImT=1

$\mathrm{T}(e_3)=\mathrm{T}(0,0,1)=(3,-3)$

γ)

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z=0 \\ -x+2y-3z=0 \end{aligned}\right\} \to x-2y+3z=0 \to x=2y-3z$$

Άρα, γενική λύση $(x,y,z)=y(2,1,0)+z(-3,0,1)$ άρα dim KerT=2

δ)

$T(1,0,0)=(1,-1)=-2(0,1)+1(1,1)=-2v_1+1v_2$

$T(1,1,0)=(-1,1)=2(0,1)+(-1)(1,1)=2v_1+(-1)v_2$

$T(1,1,1)=(2,-2)=-4(0,1)+2(1,1)=-4v_1+2v_2$

άρα $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Άσκηση.4

1) Ν.δ.ο. αν λ ιδιοτιμή του πίνακα Α τότε η λ^κ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A^κ

2) Να δειχθεί ότι για τον $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ισχύει $A^{2012}+A^{2013}=I+A$.

3) Να υπολογισθούν οι ορίζουσες det(A), det(A^2) και det(2A) για τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Απάντηση:

1) $Ax=\lambda x \xrightarrow{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ A} A^2x=\lambda Ax \xrightarrow{Ax=\lambda x} A^2x=\lambda^2 x$ **ισχύει για n=2**

Έστω ότι ισχύει για n=k δηλαδή $A^k x=\lambda^k x$ δείχνουμε ότι ισχύει για n= k+1

$$A^{k+1}x=A\cdot A^k x=A\lambda^k x=\lambda^k Ax=\lambda^k\lambda x=\lambda^{k+1}x$$

Από μέθοδο μαθηματικής επαγωγής ισχύει για κάθε kєR.

2)

Ιδιοτιμές $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$ *(τριγωνικός πίνακας: οι ιδιοτιμές αντιστοιχούν στα διαγώνια στοιχεία)*

Ιδιοδιανύσματα:

Για $\lambda_1=1$,

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 5 \\ 0 & -1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 5x_2=0 \\ -2x_2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2=0$$

$(x_1,x_2)=(x_1,0)=x_1(1,0)$

Ιδιοδιάνυσμα το $u_1=(1,0)$

Για $\lambda_2 = -1$,

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 5 \\ 0 & -1-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + 5x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}x_2$$

$$(x_1, x_2) = (-\frac{5}{2}x_2, x_2) = x_2(-\frac{5}{2}, 1)$$

Ιδιοδιάνυσμα το $u_2 = (-\frac{5}{2}, 1)$

Διαγωνοποίηση

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -5/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A^{2012} = PD^{2012}P^{-1} = P\begin{bmatrix} 1^{2012} & 0 \\ 0 & (-1)^{2012} \end{bmatrix}P^{-1} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1} = PP^{-1} = I$$

$$A^{2013} = PD^{2013}P^{-1} = P\begin{bmatrix} 1^{2013} & 0 \\ 0 & (-1)^{2013} \end{bmatrix}P^{-1} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

3)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma 1 = \Gamma 1 + SUM} \begin{vmatrix} 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\kappa.o.\kappa]{\substack{\Sigma 2 = \Sigma 2 - \Sigma 1 \\ \Sigma 3 = \Sigma 3 - \Sigma 1}}$$

$$11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\tau\rho\iota\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{o}\varsigma} 11 \cdot \det(I) = 11$$

Άρα $\det(A^2) = \det(A) \cdot \det(A) = 11^2 = 121$ και $\det(2A) = 2^5 \det(A) = 32 \cdot 11 = 352$

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΝΗΜΕΡΩΣΕΙΣ ***ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ FACEBOOK***